АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 534.22

С. С. Воронков

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВЯЗКОМ СОВЕРШЕННОМ ГАЗЕ НА ГАЗ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Выполнено обобщение формулы для скорости звука в вязком совершенном газе на газ Ван-дер-Ваальса. Показано, что эффекты, связанные с влиянием вязкости и теплопроводности на скорость звука для газа Ван-дер-Ваальса будут усиливаться.

Ключевые слова: *скорость звука, газ Ван-дер-Ваальса.*

В работе Воронкова С. С. (2004) получена формула для скорости звука в вязком теплопроводном совершенном газе, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен

$$a^2 = a_s^2 + \frac{\mathbf{V} \cdot \left(a_s^2 \operatorname{grad}\rho - \operatorname{grad}p\right) + (k-1)\Phi}{\dfrac{\partial \rho}{\partial t}}, \tag{1}$$

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$
$$+ \mu \left\{ \begin{aligned} & 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \right\},$$

где a_s — адиабатная и изоэнтропная скорость звука; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен; T — температура газа; $\mathbf{V}$ — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; p и ρ — давление и плотность газа; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; k — показатель адиабаты; t — время.

Формула (1) для скорости звука носит частный характер, так как она получена для совершенного газа, не учитывающего взаимодействия между молекулами в газе и собственный объем молекул. Как повлияет учет реальности газа на скорость звука?

В качестве уравнения состояния реального газа выберем уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a^*}{\upsilon^2}\right)(\upsilon - b) = RT, \tag{2}$$

здесь υ — удельный объем, R — газовая постоянная, a^* и b — константы, которые наряду с газовой постоянной характеризуют индивидуальные свойства вещества.

Уравнение Ван-дер-Ваальса учитывает реальные свойства газа: наличие межмолекулярного взаимодействия в газе и собственный объем молекул. Оно качественно описывает переход в жидкое состояние и критические явления.

Для реального газа, в отличие от совершенного, внутренняя энергия зависит также и от объема

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial \upsilon}\right)_T d\upsilon. \tag{3}$$

Изохорная теплоемкость, по определению, есть (Кириллин и др., 1974)

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v. \tag{4}$$

Используя термодинамические соотношения, можно показать, что для газа Ван-дер-Ваальса (Кириллин и др., 1974)

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \upsilon}\right)_T = \frac{a^*}{\upsilon^2}. \tag{5}$$

С учетом (4) и (5), уравнение (3) перепишется

$$de = c_v dT + \frac{a^*}{\upsilon^2} d\upsilon. \tag{6}$$

Решив уравнение (2) относительно температуры T, найдем

$$T = \frac{p\upsilon - pb + \dfrac{a^*}{\upsilon} - \dfrac{a^* b}{\upsilon^2}}{R}. \tag{7}$$

Дифференциал T равен

$$dT = \frac{\upsilon - b}{R} dp + \frac{p - \dfrac{a^*}{\upsilon^2} + \dfrac{2a^* b}{\upsilon^3}}{R} d\upsilon. \tag{8}$$

Учитывая, что

$$\upsilon = \frac{1}{\rho}, \tag{9}$$

из уравнения неразрывности получим

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}. \tag{10}$$

Подставляя (6), (8), (9), (10) в уравнение энергии (Шлихтинг, 1974)

$$\rho \frac{de}{dt} + p\,\mathrm{div}\mathbf{V} = \Phi, \tag{11}$$

получим

$$\frac{c_v}{R}\frac{\upsilon-b}{\upsilon}\frac{dp}{dt}+\frac{c_v}{R}\frac{p-\frac{a^*}{\upsilon^2}+\frac{2a^*b}{\upsilon^3}}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{a^*}{\upsilon^3}\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{p}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}=\Phi. \tag{12}$$

Перепишем уравнение (12) в виде

$$\frac{\upsilon-b}{\upsilon}\frac{dp}{dt}+\left(p\upsilon-\frac{a^*}{\upsilon}+\frac{2a^*b}{\upsilon^2}+\frac{R}{c_v}\frac{a^*}{\upsilon}+\frac{R}{c_v}p\upsilon\right)\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{R}{c_v}\Phi. \tag{13}$$

Зависимость теплоемкости c_v от объема определяется выражением (Кириллин и др., 1974)

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial \upsilon}\right)_T=T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v. \tag{14}$$

Из уравнения (2) получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{\upsilon-b}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v=0 \tag{16}$$

и из (14)

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial \upsilon}\right)_T=0, \tag{17}$$

то есть для газа Ван-дер-Ваальса изохорная теплоемкость не изменяется с изменением объема, также как и для совершенного газа.

Следовательно, как показано в работе (Ноздрев и др., 1974)

$$\int_v^\infty\left(\frac{\partial c_v}{\partial \upsilon}\right)_T d\upsilon=\int_{c_v}^{c_{vc}} dc_v=c_{vc}-c_v=0, \tag{18}$$

то есть

$$c_v=c_{vc}, \tag{19}$$

где c_{vc} — удельная изохорная теплоемкость совершенного газа.

Проведем преобразование с учетом (19)

$$\frac{R}{c_v}=\frac{c_{pc}-c_{vc}}{c_{vc}}=k-1, \tag{20}$$

где c_{pc} — удельная изобарная теплоемкость совершенного газа, k — показатель адиабаты.

Учитывая, что

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{d\rho}{dt}, \tag{21}$$

и принимая во внимание (20), уравнение (13) после преобразований перепишется

$$\frac{\upsilon - b}{\upsilon}\frac{dp}{dt} - \left(kp\upsilon - \frac{(2-k)a^*}{\upsilon} + \frac{2a^* b}{\upsilon^2}\right)\frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi. \tag{22}$$

Принимая во внимание выражения

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \tag{23}$$

$$a_s^2 = k\frac{p}{\rho}, \tag{24}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot \mathrm{grad}p, \tag{25}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot \mathrm{grad}\rho, \tag{26}$$

уравнение (22) перепишется в виде

$$a^2 = (a_s^2 - \frac{(2-k)a^*}{\upsilon} + \frac{2a^* b}{\upsilon^2} + \\ + \frac{\mathbf{V}\cdot((a_s^2 - \frac{(2-k)a^*}{\upsilon} + \frac{2a^* b}{\upsilon^2})\cdot \mathrm{grad}\rho - \frac{\upsilon - b}{\upsilon}\cdot \mathrm{grad}p) + (k-1)\Phi}{\frac{\partial \rho}{\partial t}})\frac{\upsilon}{\upsilon - b}. \tag{27}$$

Выражение (27) представляет собой формулу для скорости звука в вязком, теплопроводном газе Ван-дер-Ваальса. При $a^* = 0, b = 0$ она совпадает с формулой (1), полученной для совершенного газа.

Так как коэффициент

$$\frac{\upsilon}{\upsilon - b} > 1, \tag{28}$$

то эффекты, связанные с влиянием вязкости и теплопроводности на скорость звука для газа Ван-дер-Ваальса, как следует из выражения (27), будут усиливаться.

Выводы:

– эффекты, связанные с влиянием вязкости и теплопроводности на скорость звука для газа Ван-дер-Ваальса будут усиливаться;

– полученный результат позволит уточнить механизм возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе.

Литература

1. Воронков С. С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика» № 5. 2004. Режим доступа: URL: http://www.ejta.org.
2. Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. Техническая термодинамика. 2-е изд. М.: Энергия, 1974, 448 с.
3. Ноздрев В. Ф., Федорищенко Н. В. Молекулярная акустика. М.: Высшая школа, 1974, 288 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 712 с.

Об авторе

Воронков Сергей Семенович — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автомобильных дорог, инженерно-строительный факультет, Псковский государственный университет, Россия.
E-mail: vorss60@yandex.ru

S. S. Voronkov

A GENERALIZATION OF THE FORMULA FOR THE SPEED OF SOUND IN A VISCOUS PERFEKT GAS ON GAS VAN DER WAALS

The generalization of the formula for the speed of sound in a viscous perfect gas at the gas van der Waals are made. It is shown that the effects associated with the influence of viscosity and thermal conductivity on the speed of sound for the gas van der Waals will increase.

Key words: speed of sound, gas van der Waals.

About the author

Voronkov Sergey Semenovich, Associate Professor, Head of the Department of Highway, Civil Engineering Department, Pskov State University, Russia.
E-mail: vorss60@yandex.ru