

## МЕТАЛЛУРГИЯ, МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАТЕРИАЛООБРАБОТКА

УДК 621

Ю. И. Петров, М. А. Лукин

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТУРА ЯДРА СЕЧЕНИЯ

*Исследованы несколько вариантов аналитического определения ядра поперечного сечения. В результате получены уравнения контура ядра сечения. В качестве примера продемонстрирована методика определения ядра сечения эллипса и сложного сечения специального вида. Полученные результаты можно использовать для решения задачи о построении контура сечения по известному ядру.*

**Ключевые слова:** сопротивление материалов, сечение, ядро сечения.

При разработке конструкции деталей машин, зданий и сооружений часто приходится учитывать специфику стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (чугун, бетон). Несущие конструкции из таких материалов могут надёжно работать лишь в случае, когда всё поперечное сечение нагружено исключительно сжимающими напряжениями. Этого можно достигнуть только при условии, что приложенные к таким конструкциям сжимающие силы расположены внутри ядра сечения. Таким образом определение ядра сечения при известной геометрии всего поперечного сечения является первостепенной задачей конструктора и проектировщика.

Целью настоящего исследования является вывод аналитических соотношений, связывающих между собой уравнения контура сечения и его ядра.

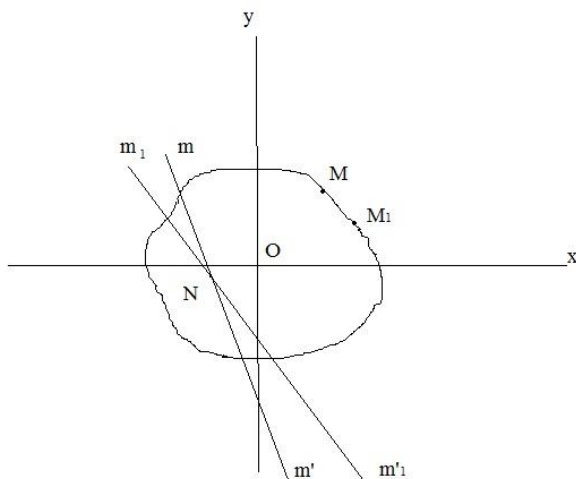
Рассмотрим выпуклый контур (рис.1), уравнение которого задано параметрически:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(t) \\ \eta &= \eta(t)\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\xi, \eta$  — текущие координаты контура (или его участка);  $t$  — параметр.

В случае явной зависимости, роль параметра может играть одна из декартовых координат  $\xi$  или  $\eta$ .

Зафиксируем параметр  $t$  и примем точку  $M \{ \xi(t), \eta(t) \}$  контура за полюс.



**Рис. 1.** Выпуклый контур

Тогда уравнение нейтральной оси  $mm^1$  имеет вид

$$\frac{\chi\xi}{i_y^2} + \frac{\gamma\eta}{i_x^2} + 1 = 0 \quad (2)$$

Здесь  $i_x, i_y$  — радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей инерции;  $x, y$  — текущие координаты нулевой линии.

Возьмем близкую к точке  $M(\xi, \eta)$  точку  $M_1(\xi_1, \eta_1)$  контура (рис. 1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi(t + \Delta t) \\ \eta_1 &= \eta(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Delta t$  — малое приращение параметра  $t$ .

Уравнение нейтральной  $m_1 m_1^1$  оси для полюса  $M_1$

$$\frac{x\xi_1}{i_y^2} + \frac{y\eta_1}{i_x^2} + 1 = 0 \quad (4)$$

Решив совместно систему (2) и (4) найдем координаты точки  $N$  пересечения прямых  $m m'$  и  $m_1 m_1^1$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\eta_1 - \eta}{\xi_1 \eta - \eta_1 \xi} i_y^2 \\ y &= \frac{\xi_1 - \xi}{\eta_1 \xi - \xi_1 \eta} i_x^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Или, в развернутом виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\xi(t + \Delta t)\eta(t) - \eta(t + \Delta t)\xi(t)} i_y^2 \\ y &= \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\eta(t + \Delta t)\xi(t) - \xi(t + \Delta t)\eta(t)} i_x^2 \end{aligned} \quad (5a)$$

Будем плавно стремиться вдоль контура точку  $M_1$  к  $M$ , что равносильно предельному переходу  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда точка  $N$  займет свое предельное положение, а ее координаты определяются после реализации данного перехода из уравнений (5a)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{\eta} i_y^2}{\dot{\xi} \eta - \dot{\eta} \xi} \\ y &= \frac{\dot{\xi} i_x^2}{\dot{\eta} \xi - \dot{\xi} \eta} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь точками обозначено дифференцирование по параметру  $t$ .

Уравнения (6) и являются искомыми уравнениями контура ядра (или его участка). К нему можно прийти, рассматривая ядро как огибающую семейства нейтральных линий, которые представляют собой однопараметрическое семейство прямых (1).

Дифференцируя (1) по параметру  $t$ .

$$\frac{x \dot{\xi}}{i_y^2} + \frac{y \dot{\eta}}{i_x^2} = 0 \quad (7)$$

и решая совместно уравнения (1) и (7) как систему, опять приходим к уравнениям (6).

В иллюстративных целях получим уравнения (6) еще одним способом. Будем рассматривать в уравнении (1) точку  $(x, y)$  как полюс. Тогда нейтральная линия будет касаться контура сечения в некоторой точке с координатами  $(\xi, \eta)$ . Запишем ее уравнение

$$\frac{\tilde{\xi} - \xi}{\dot{\xi}} = \frac{\tilde{\eta} - \eta}{\dot{\eta}} \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  — текущие координаты касательной.

Приведем уравнение (8) к виду

$$\frac{\tilde{\xi} \dot{\eta}}{\dot{\xi} \eta - \dot{\eta} \xi} + \frac{\tilde{\eta} \dot{\xi}}{\dot{\eta} \xi - \dot{\xi} \eta} + 1 = 0 \quad (9)$$

Сравнивая (1) и (9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{x}{i_y^2} &= \frac{\dot{\eta}}{\xi \eta - \dot{\eta} \xi} \\ \frac{y}{i_x^2} &= \frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta} \xi - \dot{\xi} \eta} \end{aligned} \quad (9a)$$

Из (9а) сразу следует (6).

Отметим, что полученные результаты легко распространяются на случаи невыпуклых сечений, сечений с нарушением сплошности, а также на тот случай, если контур сечения (или его часть) описывается неявной функцией.

Некоторые особенности возникают в случае, если контур сечения (или его часть) ограничен отрезками прямых. В этом случае огибающая вырождается в точку, вокруг которой вращаются нулевые линии при перемещении полюса вдоль контура сечения. Для построения границ ядра достаточно соединить эти точки отрезками прямых. Можно уравнения этих отрезков получить из уравнения (1), подставив туда граничные значения параметра. Впрочем, случай многоугольных сечений подробно рассматривается в учебной литературе [1], [2].

Проиллюстрируем изложенные результаты конкретными примерами.

Рассмотрим сечение в форме эллипса с полуосями  $a$ ,  $b$  (рис. 2)

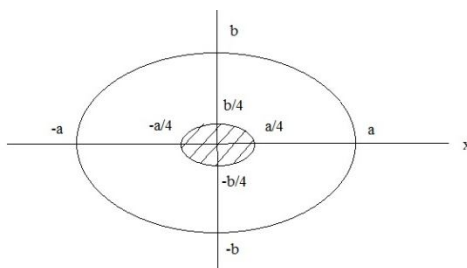


Рис. 2. Сечение в форме эллипса

Уравнение контура сечения

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad i_x^2 = \frac{b^2}{4}, \quad i_y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Простейшее параметрическое представление

$$\xi = a \cos t \quad \eta = b \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Имеем  $\dot{\xi} = -a \sin t$ ,  $\dot{\eta} = b \cos t$

Подставляя  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$  в (6), получим параметрическое представление ядра сечения.

$$x = -\frac{a}{4} \cos t, \quad y = -\frac{b}{4} \sin t.$$

Исключая  $t$ , получаем явное уравнение

$$\frac{x^2}{(a/4)^2} + \frac{y^2}{(b/4)^2} = 1.$$

Таким образом, получили известный результат: ядром сечения является эллипс, подобный эллипсу контура, с полуосями вчетверо меньшими полуосями контура. На рисунке ядро заштриховано.

В качестве 2-го примера рассмотрим контур, изображенный на рис. 3 и состоящий из дуги окружности и 3-х отрезков прямых.

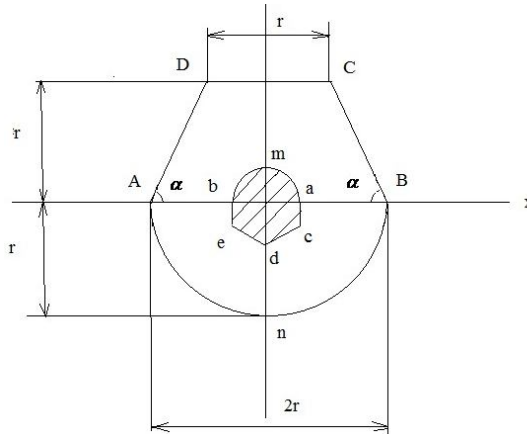


Рис. 3. Контур

ABCD — равнобочная трапеция с острым углом  $\alpha = \arctg 2$ . Размеры подобраны так, что начало координат совпадает с центром тяжести сечения. Элементарный подсчет дает для радиусов инерции  $i_x, i_y$  следующие значения:

$$i_x^2 = \frac{3\pi + 10}{12(\pi + 3)} r^3 \cong 0,26r^2, \quad i_y^2 = \frac{2\pi + 5}{8(\pi + 3)} r^2 = 0,23r^2.$$

Участок контура А и В

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos t, \\ \eta &= r \sin t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Имеем  $\dot{\xi} = -r \sin t, \dot{\eta} = r \cos t$

Подставляем  $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$  в систему (6)

Получим

$$\begin{aligned} x &= -0,26r \cos t, \\ y &= -0,23r \sin t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Это уравнение верхней половины эллипса с полуосями 0, 26r и 0, 23r (дуга amb на рис. 3)

Уравнение отрезка AD  $\eta = 2\xi + 2r$  ( $-r \leq \xi \leq -\frac{r}{2}$ ) можно представить в параметрической форме следующим образом

$$\xi = t, \quad \eta = 2t + 2r, \quad -r \leq t \leq -\frac{r}{2}$$

Имеем  $\dot{\xi} = 1, \dot{\eta} = 2$ . Подставляя  $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$  в уравнение (6), получаем  $x = 0,23r; y = -0,13r$ .

На рисунке (3) эта точка помечена буквой с.

Отрезок CD описывается уравнениями

$$\xi = t, \eta = r, -\frac{r}{2} \leq t \leq \frac{r}{2}.$$

Имеем  $\dot{\xi} = 1$ ,  $\dot{\eta} = 0$  и из (6) получаем  $x=0$ ,  $y = -0, 26r$  (точка d на рис. 3).

Отрезку BC, описываемому уравнениями  $\xi = t$ ,  $\eta = -2t + 2r$  ( $\frac{r}{2} \leq t \leq r$ ) соот-

ветствует точка с координатами  $X = -0, 23r$ ,  $y = -0, 13r$  (на рис. 3 точка e). Соединяя полученные точки, получаем окончательную форму ядра сечения (на рис. 3 эта область заштрихована). Разумеется можно было построить нейтральные линии для угловых точек A, B, C, D, линии пересечения которых дали бы угловые точки части контура ядра сечения acdeb.

В заключение отметим, что полученные результаты можно использовать для решения задачи о построении контура сечения по известному ядру, при этом координаты  $x$ ,  $y$  будут иметь смысл текущих координат контура, а  $\xi, \eta$  — координат ядра и должны быть заданы радиусы инерции, а полученные формулы остаются в силе. Полученные результаты исследования могут быть использованы при изучении курсов механики, сопротивления материалов, теории упругости и теории пластичности.

#### Литература

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976 г., 608 с.
2. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. Издательство: Москва «Высшая Школа». 1975 год, 657 с.

#### Об авторах

**Петров Юрий Иванович** — старший преподаватель кафедры теории машин и механизмов, механико-машиностроительный факультет, Псковский государственный университет, Россия.

**Лукин Михаил Анатольевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры теории машин и механизмов, механико-машиностроительный факультет, Псковский государственный университет, Россия.

E-mail: mishalukin@pochta.ru

*Yu. I. Petrov, M. A. Lukin*

## ANALYTICAL DETERMINATION OF THE CONTOUR OF THE NUCLEUS CROSS SECTION

*Explore several options for the analytical determination of the nucleus cross section. The result obtained by the equation contour core section. As an example, demonstrated technique for determining the core section of the ellipse and complicated cross-*

*section of a special kind. The results can be used to solve the problem of constructing the circuit section from the known to the kernel.*

**Key words:** Strength of materials, cross-section, the core section.

*About the Authors*

**Petrov Yuriy Ivanovich**, Senior Lecturer of the Department of Theory of machines and mechanisms, Faculty of Mechanical Engineering, Pskov State University, Russia.

**Lukin Michael Anatolievich**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of Theory of machines and mechanisms, Faculty of Mechanical Engineering, Pskov State University, Russia.

E-mail: [mishalukin@pochta.ru](mailto:mishalukin@pochta.ru)