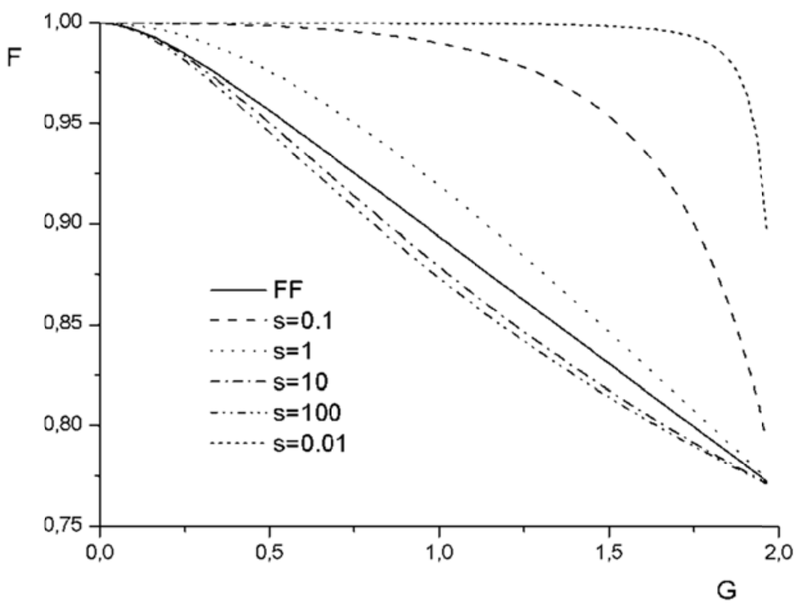

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Ю.М., Салангин А.А. Системный подход к проектированию сложных систем // Вестник Херсонского национального технического университета. – Вып. 2(25). – Херсон : ХНТУ, 2006. – С. 466–472.
2. Смирнов Ю.М., Рукавишников С.С. Распределение ресурсов при оценке показателей функционирования // Труды СПбГПУ, № 487, – СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2002. – С. 55–62.
3. Салангин А.А. Подход к директивному решению задач разработки и реализации проектов // Труды Псковского политехнического института. – № 14.1. – Псков : Изд-во ППИ, 2010. – С. 29–33.

И.А. СТРОЧКОВ

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (НВЖ) В ПРИБЛИЖЕНИИ ОЗЕЕНА

Рассмотрено решение задачи обтекания тела потоком (НВЖ). Уравнения Навье-Стокса заменяются линеаризованными уравнениями в приближении Озеена. Решение задачи представляется в интегральной форме. Для искомого вектора плотности векторного потенциала записана система линейных интегральных уравнений типа Фредгольма (второго рода). Предлагается искать плотность потенциала в виде двойных тригонометрических многочленов.

Задача обтекания тела потоком (НВЖ) рассматривается либо для случая медленного течения жидкости ($R_e << 1$), когда инерционные члены отбрасываются [1], либо в приближении пограничного слоя ($R_e >> 1$) [2], когда рассматривается течение в тонком слое толщиной $\delta \approx \frac{1}{\sqrt{R_e}}$ в пограничной области, либо в приближении Озеена ($R_e \sim 1$), когда инерционные члены линеаризуются [3].

В уравнениях Навье-Стокса

$$\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\Delta\vec{v},$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad (1)$$

заменим в левой части (в инерционных членах) вектор $\vec{v}\left(v_x, v_y, v_y\right)$ скорости возмущенного потока на вектор $\vec{u}\left(u_x, u_y, u_z\right)$ скорости однородного невозмущенного потока

$$\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\Delta\vec{v},$$
$$\operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{2}$$

Получим уравнения движения (НВЖ) в приближении Озеена. При интегрировании системы (1) требуется выполнение условия $\vec{v} \underset{|\vec{r}|\to\infty}{\longrightarrow} \vec{u}$ и условий прилипания жидкости на поверхности S обтекаемого тела

$$\vec{v}\,|_S = 0, \tag{3}$$

поэтому линеаризованная система (2) достаточно близка к системе (1) вдали от поверхности тела ($\vec{v} \approx \vec{u}$), но существенно отличается от неё вблизи обтекаемой поверхности. Вместе с тем, в отличие от системы уравнений движения идеальной жидкости ($\nu = 0$), которая, казалось бы, имеет тот же недостаток, что и (2), линеаризованная система (2) имеет отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям прилипания (3).

Вычисляя div от левой и правой частей (2) в силу условия несжимаемости жидкости ($\operatorname{div}\vec{v} = 0$), получим

$$\Delta P = 0. \tag{4}$$

Аналогично, вычисляя $\operatorname{r\vec{o}t}$ от (2), находим

$$\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{\Omega} = \nu\Delta\vec{\Omega}, \tag{5}$$

где

$$\vec{\Omega} = \operatorname{r\vec{o}t}\vec{v}. \tag{6}$$

Переходя к безразмерным переменным

$$\vec{\Omega} = \Omega_0\Omega^*;\ \vec{r} = L\vec{r}^*,\ \vec{u} = \tilde{u}\vec{u}^*,$$
$$\vec{u}^*\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right);\ \alpha_1 = \frac{u_x}{\tilde{u}},\ \alpha_2 = \frac{u_y}{\tilde{u}},\ \alpha_3 = \frac{u_z}{\tilde{u}}. \tag{7}$$

Запишем

$$R_e\left(\vec{u}^*\vec{\nabla}\right)\vec{\Omega} = \Delta\vec{\Omega}, \tag{8}$$
$$R_e = \frac{\tilde{u}L}{\nu};\ \tilde{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2};\ L = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}, \tag{9}$$

l_i – характерные размеры тела по осям x_i.

Здесь и далее звездочки в обозначении безразмерных переменных опускаем.

Положим в (8)

$$\vec{\Omega} = e^{\gamma q}\vec{\omega},$$
$$q = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \tag{10}$$

Вычисляя

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial x} = e^{\gamma q}\left(\gamma\alpha_1\vec{\omega} + \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial y} = e^{\gamma q}\left(\gamma\alpha_2\vec{\omega} + \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial y}\right), \tag{11}$$
$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} = e^{\gamma q}\left(\gamma\alpha_3\vec{\omega} + \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial x^2} = e^{\gamma q}\left(\gamma^2\alpha_1^2\vec{\omega} + 2\gamma\alpha_1\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial x^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial y^2} = e^{\gamma q}\left(\gamma^2\alpha_2^2\vec{\omega} + 2\gamma\alpha_2\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial y} + \frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial y^2}\right), \tag{12}$$
$$\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial z^2} = e^{\gamma q}\left(\gamma^2\alpha_3^2\vec{\omega} + 2\gamma\alpha_3\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial z} + \frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial z^2}\right)$$

и подставляя (11), (12) в (8), учитывая, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, получим

$$\Delta\vec{\omega}+\left(\alpha_1\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial z}\right)\left(2\gamma-R_e\right)+\left(\gamma^2-R_e\gamma\right)\vec{\omega}=0. \tag{13}$$

Выбирая

$$\gamma=\frac{R_e}{2}, \tag{14}$$

находим

$$\Delta\vec{\omega}=\frac{R_e^2}{4}\vec{\omega}. \tag{15}$$

Решение этого уравнения, записанного в сферических координатах и зависящее только от r, имеет вид

$$\vec{\omega}=\frac{\vec{c}e^{\pm\frac{R_e}{2}r}}{r}. \tag{16}$$

Возвращаясь к декартовым координатам, перенося начало координат в произвольную точку $P\in S$, интегрируя по S, запишем

$$\vec{\Omega}(M)=\iint\limits_S\frac{e^{\frac{R_e}{2}\left(q_{mp}-r_{mp}\right)}\vec{\chi}(p)}{r_{mp}}ds_p. \tag{17}$$

Здесь $\vec{\chi}(p)$ вектор плотности интегрального представления $\vec{\Omega}$,

$$r_{mp}=\sqrt{\left(x_m-x_p\right)^2+\left(y_m-y_p\right)^2+\left(z_m-z_p\right)^2},$$

$$q_{mp}=\alpha_1\left(x_m-x_p\right)+\alpha_2\left(y_m-y_p\right)+\alpha_3\left(z_m-z_p\right). \tag{18}$$

Выражения (17), (18) и

$$r\vec{o}t\vec{v}=\vec{\Omega};$$

$$div\vec{v}=0 \tag{19}$$

дают формальное представление дивергенции и ротора векторного поля скоростей (содержат неизвестный вектор интегральной плотности $\vec{\chi}(p)$, $P\in S$), что позволяет записать выражение для поля скоростей [4]:

$$\vec{\Omega}(M)=\frac{1}{4\pi}r\vec{o}t\iiint\limits_\tau\frac{r\vec{o}t\vec{v}}{r_{mq}}d\tau_q+\vec{u}. \tag{20}$$

Здесь интегрирование ведется по всему пространству, кроме области, занимаемой обтекаемым телом, предполагается при этом, что первое слагаемое асимптотически стремится к нулю при $r\to\infty$, постоянный вектор $\vec{u}$ определяет вектор скорости внешнего потока (НВЖ) на бесконечности.

Решение (19) ищется в виде $\vec{v}=r\vec{o}t\vec{w}$; тогда $r\vec{o}t\left(r\vec{o}t\vec{w}\right)=\vec{\Omega}$. Но $r\vec{o}t\left(r\vec{o}t\vec{A}\right)=gr\vec{a}d\,div\vec{A}-\Delta\vec{A}=-\Delta\vec{A}$, если $div\vec{A}=0$ и (20) находится как частное решение уравнения Пуассона $\Delta\vec{v}=-\vec{\Omega}$.

Таким образом, распределение скорости (20) удовлетворяет условию на бесконечности. Потребуем, чтобы (20) удовлетворяло условию прилипания на поверхности S

$$\vec{v}|_S=0, \tag{21}$$

$$r\vec{o}t\iiint\limits_\tau\frac{\vec{\Omega}_{mp}}{r_{mp}}d\tau\Big|_{M\in S}=-4\pi\vec{u}. \tag{22}$$

Поскольку $\vec{\Omega}$ содержит неизвестный вектор интегральной плотности $\vec{\chi}(P)$, то (22) представляет собой систему трех линейных интегральных уравнений типа Фредгольма относительно трех составляющих вектора $\vec{\chi}\left(\chi_x,\chi_y,\chi_z\right)$. Численное решение такой системы интегральных уравнений вызывает определенные трудности. Так, применение метода коллокаций (замена определенных интегралов соответствующей интегральной суммой) при разбиении интервала интегрирования вдоль каждой координатной оси на n элементарных интервалов приведет к необходимости вычисления системы N линейных алгебраических уравнений, где $N \approx 3 \cdot n^5$. Для достижения приемлемой точности следует выбрать $n \approx 10^4$, тогда $N \approx 3 \cdot 10^{20}$. Трудности вызывает даже хранение коэффициентов такой системы, тем более её решение.

Положим $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y, \chi_z)$. Представим каждую составляющую в виде соответствующего двойного тригонометрического многочлена вида

$$P_n(x,y) = a_0 + \sum_{\substack{k,m=0 \\ (k+m\neq 0)}}^{n} \left[a_{km} \cos\left(\frac{k\pi}{l_x} x + \frac{m\pi}{l_y} y \right) + b_{km} \sin\left(\frac{k\pi}{l_x} x + \frac{m\pi}{l_y} y \right) \right]. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получаем три линейных функциональных уравнения относительно коэффициентов a_{km}, b_{km}, содержащих пять переменных $(x_1,...,x_5)$. Разбивая в этих уравнениях отрезки изменения x_i на n интервалов, приходим к СЛАУ относительно искомых величин, коэффициентами которых служат несобственные тройные интегралы от соответствующих несобственных поверхностных интегралов. Для вычисления таких интегралов можно использовать более экономичные методы вычисления, например, метод Монте-Карло. При этом несобственные интегралы заменяются интегралами по конечной области, верхние пределы этой области можно выбрать их варьированием до достижения заданной точности.

Если поверхность обтекаемого тела не является выпуклой, то можно использовать неравномерную сетку разбиения, выбирая её более частой в тех частях поверхности, где скорость изменения коэффициентов кривизны становится большой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. – Т. 6. – М.: Наука, 1988. – С. 89.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М., 1978. – 439 с.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – Ч. II. – М., 1963. – 516 с.
4. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М. : Высшая школа, 1963.

В.Н. ЯКОВЛЕВ

ИНФЛЯЦИЯ КАК ПРОЯВЛЕНИЕ ЗАКОНА ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ

На достаточно простом примере иллюстрируется взаимосвязь физических и экономических законов, открывающая возможность применения физических методов анализа в экономике. Это подчеркивает фундаментальную роль физики не только в информативном, но и в методическом смысле.

Каждый свято исполняет
предназначенную роль.
Энтропия возрастает,
дорожает алкоголь.
(Тимур Шаов)

То, что физические знания являются базовыми не только для технических дисциплин, признают фактически все, за исключением небольшой группы людей, которые вообще физику не знают. Но при этом чаще всего подразумевается роль физики в сугубо естественнонаучных дисциплинах: химия, астрономия, биология, медицина. Боле того, традиционными философами была создана дисциплина «Концепции современного естествознания», в которую физика включена всего лишь как один из разделов. Но они при этом закрывают глаза на то, что физика не часть, а фундамент естественных наук. И самое для них удивительное, что физические знания вдруг оказываются основополагающими и за пределами естествознания. Самый простой пример – это закон сохранения энергии. Этот закон настолько фундаментальный, что проявляет себя не только в сфере естественнонаучной, но и в общественно-политической. К примеру, хотят того политологи