$$\begin{cases} F = \dfrac{\tau_\alpha}{\sqrt{S_\alpha}} + \dfrac{\tau_\beta}{\sqrt{S_\beta}} + \dfrac{\tau_\gamma}{\sqrt{S_\gamma}} \to \min \\ G = S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = S_0 \end{cases},$$

Эта задача имеет аналитическое решение. Используя уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} + \lambda \frac{\partial G}{\partial S_i} = 0,$$

и введя обозначения $\lambda = \dfrac{\delta^{3/2}}{2}$, $\tau_i = \mu_i^{3/2}$, находим $S_i = \dfrac{\mu_i}{\delta}$, где $i = (\alpha, \beta, \gamma)$. Далее, имеем $S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = S_0 = \dfrac{\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma}{\delta}$.

В итоге находим

$$S_\alpha = \frac{\tau_\alpha^{2/3}}{\tau} S_0, \quad S_\beta = \frac{\tau_\beta^{2/3}}{\tau} S_0, \quad S_\gamma = \frac{\tau_\gamma^{2/3}}{\tau} S_0,$$

где $\tau = \tau_\alpha^{2/3} + \tau_\beta^{2/3} + \tau_\gamma^{2/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Ю.М. Состояние и перспективы развития методов системного проектирования / Сб. трудов «Методы кибернетики и инф. Технологии», вып. 1. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1994.
2. Салангин А.А. Методология системного анализа проектируемых технических комплексов (монография). – Псков : Изд-во ППИ, 2009. – 280 с.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. – М.: Наука, 1975.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997.
5. Попов Ю. П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. – М.: Знание, 1983.
6. Кухтенко А.И. Абстрактная теория систем, современное состояние и тенденции развития. – Киев : Наукова думка, 1982. – 328 с.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Железнов И. Г. Сложные технические системы (оценка характеристик): учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1984. – 117 с.
9. Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Советское радио, 1971. – 400 с.

А.А. САЛАНГИН

ДВУХЭТАПНЫЙ ПОДХОД К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ РЕСУРСОВ В СИСТЕМНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Рассматривается способ двухэтапного распределения ресурсов, когда на первом этапе обеспечивается максимальный рост параметрических множителей, характеризующих эффективность затрат по направлениям проекта, а на втором этапе обеспечивается развитие направлений с наибольшим значением параметрического множителя.

В работах [1–3] раскрыты существо системного подхода и основные положения магистрального метода распределения ресурсов (МРР) при параметрическом синтезе. Проблемными остаются вопросы:

– реализация МРР при его эффективности, когда не гарантируется достоверное определение вторых производных от критериальной функции *F* и функции ограничения *G*;
– выбора субоптимальных распределений при нереализуемости или неэффективности МРР.

Данная статья посвящена анализу второй группы вопросов, когда неэффективность или нереализуемость стационарного решения задач распределения ресурсов при реализации проектов сложных технических систем приводит к необходимости использовать другие подходы.

Задача разработки проекта формулируется так:

– на первом уровне (внутри направления проекта) как задача достижения таких функциональных характеристик x_i структурного подразделения предприятия (например, относительная производительности труда) и таких структурных характеристик y_i подразделения (например, относительная численность персонала), при которых обеспечивается минимизация суммарного отклонения мощностей подразделения $x_i y_i$ от предельно достижимой $F_i = 1 - x_i y_i$ при ограничении на затраты по увеличению мощности:

$$G = \alpha_i \ln\frac{1}{1-x_i} + \beta_i \ln\frac{1}{1-y_i} \le G_i^0, \tag{1}$$

где $\alpha_i + \beta_i \ge 1$.

– на втором уровне (между направлениями проекта) как задача минимизации некоторого критерия *F* близости мощностей $x_i y_i$ к единице при ограничении

$$G = \sum_i G_i \le G_0;$$

Примерами таких критериев могут быть

$$F_1 = 1 - \prod_i x_i y_i, \quad F_2 = 1 - \frac{1}{n}\sum_i x_i y_i, \quad F_3 = \prod_i (1 - x_i y_i).$$

На первом уровне необходимые условия оптимальности *F* следуют из уравнений Лагранжа

$$\frac{dF}{dx_i} + \lambda \frac{dG}{dx_i} = 0,$$

откуда имеем

$$\lambda_i = \frac{y_i(1-x_i)}{\alpha_i} = \frac{x_i(1-y_i)}{\beta_i}. \tag{2}$$

Должно быть

$$y_i = \frac{v_i}{u_i + v_i}, \quad \lambda_i = \frac{u_i v_i}{u_i + v_i}, \text{ где } v_i = \frac{x_i}{\beta_i}, \quad u_i = \frac{1-x_i}{\alpha_i}.$$

Достаточные условия оптимальности *F*, представимые в форме $h_{ii} = -1/\lambda_i (d\lambda_i / dx_i) > 0$, выполняются не всегда:

$$\text{для } F_1: \quad h_{ii} = \frac{1}{x_i(1-x_i)} > 0 \quad \text{– выполняются всегда;}$$

$$\text{для } F_2: \quad h_{ii} = \frac{\dfrac{x_i^2}{\beta_i} - \dfrac{(1-x_i)^2}{\alpha_i}}{x_i(1-x_i)(u_i - v_i)} > 0 \quad \text{– выполняются, если } x_i > \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \sqrt{\beta_i}}};$$

$$\text{для } F_3: \quad h_{ii} = \frac{1}{x_i(1+\alpha_i v_i)} < 0 \quad \text{– не выполняются.}$$

Таким образом, если в качестве критерия распределения ресурсов на втором уровне использовать F_2 или F_3, то стационарное решение задачи параметрического синтеза не является эффективным и необходимо использовать директивное распределение.

Один из вариантов директивного подхода был рассмотрен в [3], где структура распределения выбрана в дробно-рациональном виде

$$x^{dir} = \frac{rt}{rt + \alpha(1-t)}, \quad y^{dir} = \frac{rt}{rt + \beta(1-t)}, \quad (0 \le t \le 1), \tag{3}$$

а характерный параметр директивного распределения r_i изменялся в диапазоне от $\alpha_i\beta_i$ до 1. Расчёты при реальных α_i, β_i (табл. 1) показали, что во всём диапазоне t при одинаковых затратах G директивное распределение с $r_i = 1$, соответствующее равенству удельной эффективности затрат по каждому направлению, является наилучшим, а распределение с

$r_i = \alpha_i\beta_i$, соответствующее квазимагистральному решению, при котором $\lambda_i = \lambda \le \lambda_i^*$, является наихудшим.

В настоящей статье предлагается другой подход. Пусть в качестве критериальной функции выбрана F_2. Разделим процесс минимизации критериальной функции на два этапа. На первом этапе (где $h_{ii} < 0$ пока $x_i \le x_i^* = \dfrac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \sqrt{\beta_i}}}$) потребуем максимального роста параметрических множителей, характеризующих эффективность затрат по направлениям проекта, а на втором этапе (где $h_{ii} > 0$) обеспечим магистральное решение, т. е. развитие в первую очередь направления с наибольшим значением множителей.

Для проведения первого этапа вместо минимизации F_2 можно исходить из требования минимизации другой критериальной функции

$$F = 1 - \prod_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i^*},$$

где λ_i^* – предельное значение параметрического множителя. Необходимые условия оптимальности следуют из уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

Отсюда, так как

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda_i}\prod_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i^*}\frac{d\lambda_i}{dx_i}, \qquad \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \frac{dG_i}{dx_i},$$

то

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dx_i} + \mu\frac{dG_i}{dx_i} = 0,$$

где $\mu = \dfrac{\gamma}{1-F}$. Далее $\mu = \dfrac{\dfrac{1}{\lambda_i}\dfrac{d\lambda_i}{dx_i}}{\dfrac{dG_i}{dx_i}} = \dfrac{1}{\lambda_i}\dfrac{d\lambda_i}{dG_i}$, что, учитывая (1, 2), эквивалентно условиям

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dG_i} = \frac{1 - x_i - y_i}{\alpha_i x_i + \beta_i y_i}, \tag{5}$$

где $y_i = \dfrac{v_i}{v_i + u_i}$.

Уравнения Лагранжа (4) эквивалентны требованию равенства μ_i между собой в оптимальной точке. По аналогии с [3] примем для диапазона $0 < t \le \dfrac{1}{2}$ директивное распределение такое, что

$$\mu_i = \frac{1-2t}{t}. \tag{6}$$

Из (5, 6) после преобразований, находим

$$x_i = \frac{t}{\alpha_i C(C+D)}, \quad y_i = \frac{t}{\beta_i D(C+D)}, \tag{7}$$

где $C^2 = \dfrac{t + \alpha_i(1-2t)}{\alpha_i}$, $D^2 = \dfrac{t + \beta_i(1-2t)}{\beta_i}$.

В конце первого этапа при $t = \dfrac{1}{2}$ все параметрические множители достигнут своих максимальных значений

$$\lambda_i^* = \max_x \lambda_i = \frac{1}{\left(\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}\right)^2}, \tag{8}$$

а характеристики x_i, y_i примут вид $x_i = \dfrac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}}$, $y_i = \dfrac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}}$, для которых уже выполняются достаточные условия эффективности.

Следовательно, на втором этапе можно пользоваться магистральным методом, увеличивая характеристики направлений с наибольшим параметрическим множителем.

Для сравнения вариантов распределения был проведен вычислительный эксперимент с исходными данными, соответствующими годовым отчетам холдинговой компании «Ленинец». Исходными данными являются: α_i – коэффициент нормирования затрат на рост оборудования или персонала; β_i – коэффициент нормирования затрат на рост производительности труда. Коэффициенты α_i и β_i, взятые для разных структурных единиц (подразделений, отделов), приведены в таблице.

Таблица 1

	i			
	1	**2**	**3**	**4**
α_i	3,8	1,0	1,96	0,64
β_i	1,2	4,0	0,49	0,81

На рис.1. представлены результаты расчётов относительных значений параметрических множителей ($\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i^*}$) по формулам (2, 8) для различных α_i, β_i на первом этапе ($0 < t \leq 0{,}5$).

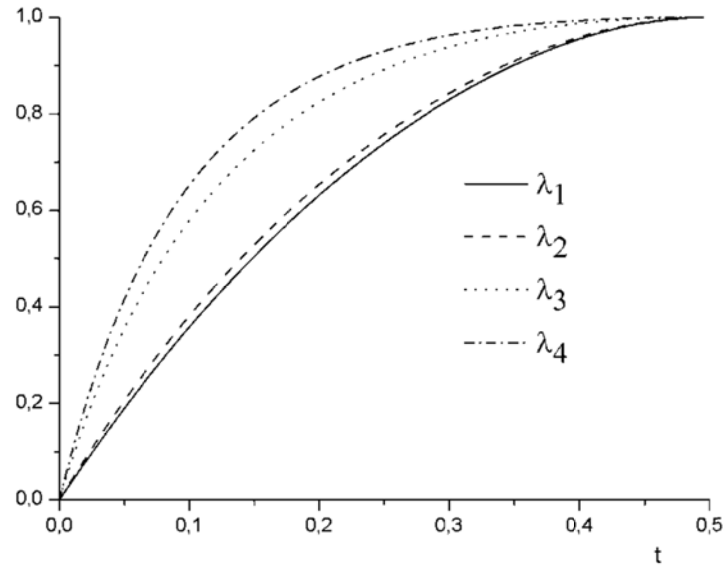

Рис. 1

В конце первого этапа локальные множители Лагранжа λ_i достигают своего максимального значения.

На рис. 2 представлены для первого этапа эффективности затрат по четвертому направлению проекта (производная мощности по затратам), вычисленные при $\alpha_4 = 0{,}61$, $\beta_4 = 0{,}81$ для различных распределений: FF – по формуле (7), другие – по формуле (3), где $r = s\sqrt{\alpha_i\beta_i}$. Из рис. 2 следует, что директивное распределение (7) позволяет достичь большей эффективности по сравнению с распределением (3). Увеличение параметра s сближает эффективности этих распределений.

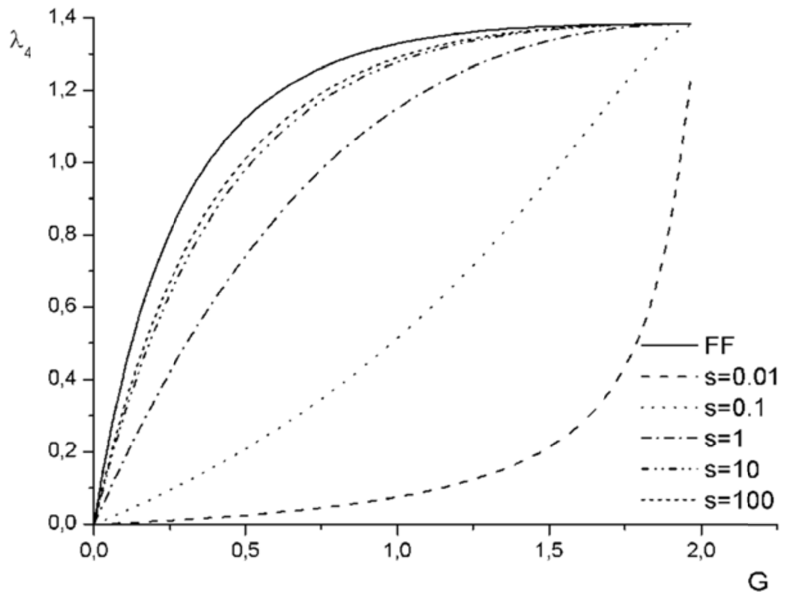

Рис. 2

На рис. 3 представлены для первого этапа интегральные эффективности затрат как производные критериальной функции F_2 по затратам по всем направлениям для различных директивных распределений.

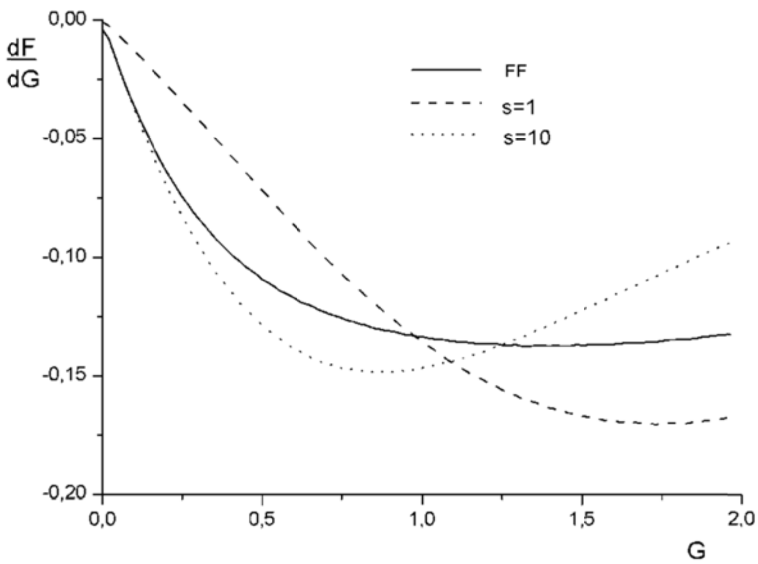

Рис. 3

Зависимости критериальной функции F_2 от расходов на первом этапе изображены на рис. 4 для различных видов директивного распределений, из которого видно, что из рассмотренных распределений предпочтительнее (7) и близкое к нему (3) (при $s > 1$).

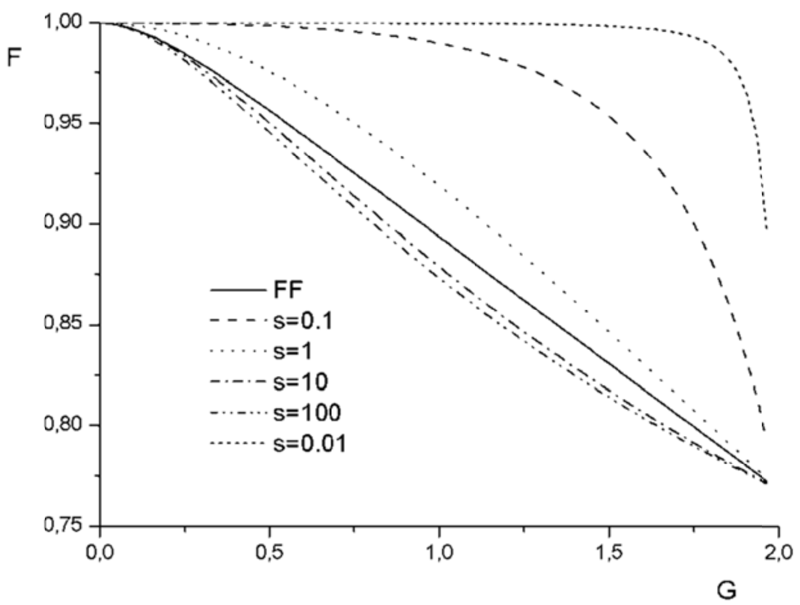

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Ю.М., Салангин А.А. Системный подход к проектированию сложных систем // Вестник Херсонского национального технического университета. – Вып. 2(25). – Херсон : ХНТУ, 2006. – С. 466–472.
2. Смирнов Ю.М., Рукавишников С.С. Распределение ресурсов при оценке показателей функционирования // Труды СПбГПУ, № 487, – СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2002. – С. 55–62.
3. Салангин А.А. Подход к директивному решению задач разработки и реализации проектов // Труды Псковского политехнического института. – № 14.1. – Псков : Изд-во ППИ, 2010. – С. 29–33.

И.А. СТРОЧКОВ

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (НВЖ) В ПРИБЛИЖЕНИИ ОЗЕЕНА

Рассмотрено решение задачи обтекания тела потоком (НВЖ). Уравнения Навье-Стокса заменяются линеаризованными уравнениями в приближении Озеена. Решение задачи представляется в интегральной форме. Для искомого вектора плотности векторного потенциала записана система линейных интегральных уравнений типа Фредгольма (второго рода). Предлагается искать плотность потенциала в виде двойных тригонометрических многочленов.

Задача обтекания тела потоком (НВЖ) рассматривается либо для случая медленного течения жидкости ($R_e << 1$), когда инерционные члены отбрасываются [1], либо в приближении пограничного слоя ($R_e >> 1$) [2], когда рассматривается течение в тонком слое толщиной $\delta \approx \dfrac{1}{\sqrt{R_e}}$ в пограничной области, либо в приближении Озеена ($R_e \sim 1$), когда инерционные члены линеаризуются [3].

В уравнениях Навье-Стокса

$$\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\Delta\vec{v},$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad (1)$$

заменим в левой части (в инерционных членах) вектор $\vec{v}\left(v_x, v_y, v_y\right)$ скорости возмущенного потока на вектор $\vec{u}\left(u_x, u_y, u_z\right)$ скорости однородного невозмущенного потока