А.А. САЛАНГИН

ПОДХОД К ДИРЕКТИВНОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ РАЗРАБОТКИ И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ

Предложен класс директивных распределений для задач разработки и реализации проектов создания новой техники при невыполнимости условий оптимальности стационарного решения. Показано, что директивное распределение, соответствующее равенству удельной эффективности затрат по каждому направлению, является наилучшим.

В докладе [1] на Международной конференции по математическому моделированию МКММ'2006 (Феодосия, 2006 г.) раскрыты существо системного подхода и основные положения магистрального метода распределения ресурсов (МРР) при параметрическом синтезе. Проблемными остаются вопросы выбора субоптимальных распределений при нереализуемости или неэффективности МРР. В статье [2] даны формулировка и приближенное решение задачи разработки и управления реализацией проекта создания новой техники.

Задача разработки проекта формулируется :

- *на первом уровне* (внутри направления проекта) как задача достижения таких функциональных характеристик x_i, y_i структурного подразделения предприятия (например, относительная производительности труда и относительная численность персонала), при которых обеспечивается минимизация суммарного отклонения мощности подразделения $x_i y_i$ от предельно достижимой $F_i = 1 - x_i y_i$ при ограничении на затраты по увеличению мощности:

$$G_i = \alpha_i \ln\frac{1}{1-x_i} + \beta_i \ln\frac{1}{1-y_i} \le G_i^0.$$

Не умоляя общности, можно принять $\alpha_i + \beta_i \le 1$, где α_i – коэффициент нормирования затрат на единицу оборудования; β_i – коэффициент нормирования затрат на единицу персонала.

- *на втором уровне* (между направлениями проекта) как задача минимизации некоторого критерия *F* близости мощностей $x_i y_i$ к единице ($i = 1,...,m$) при ограничении

$$G = \sum_i G_i \le G_0;$$

Примерами таких критериев могут быть

$$F_1 = 1 - \prod_i x_i y_i, \quad F_2 = 1 - \frac{1}{m}\sum_i x_i y_i, \quad F_3 = \prod_i (1 - x_i y_i). \tag{1}$$

Отметим, что

$$F_1 \ge 1 - (xy)_{\min} \ge F_2 \ge 1 - (xy)_{\max} \ge F_3.$$

На первом уровне при оптимальном распределении ресурсов необходимые условия оптимальности *F* следуют из уравнения Лагранжа

$$\frac{dF}{dx_i} + \lambda \frac{dG}{dx_i} = 0$$

и имеют вид

$$\lambda_i = \frac{y_i(1-x_i)}{\alpha_i} = \frac{x_i(1-y_i)}{\beta_i}$$

Должно быть $y_i = \dfrac{v_i}{u_i + v_i}$, $\lambda_i = \dfrac{u_i v_i}{u_i + v_i}$, где $v_i = \dfrac{x_i}{\beta_i}$, $u_i = \dfrac{1-x_i}{\alpha_i}$.

Тогда для критериев F_1, F_2, F_3 необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\text{äëÿ } F_1: \qquad \lambda_i^{(1)} = \frac{u_i}{x_i} = const;$$

$$\text{äëÿ } F_2: \qquad \lambda_i^{(2)} = \frac{u_i v_i}{u_i + v_i} = const;$$

$$\text{äëÿ } F_3: \qquad \lambda_i^{(3)} = \frac{v_i}{1 + \alpha_i v_i} = const.$$

Поскольку $\lambda_i^* = \max\limits_x \lambda_i = \dfrac{1}{\left(\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_i}\right)^2}$ и $\lambda_i^{(2)} \le \lambda_i^*$, а также $\lambda_i^{(3)} \le \dfrac{1}{\alpha_i + \beta_i}$, то для F_2, F_3 необходимые условия не всегда реализуются.

Достаточные условия оптимальности F: $\partial^2 F / \partial x_i^2 > 0$ могут быть представлены при квадратичной апроксимации критериальной функции F в виде $\partial \mathrm{H}/\partial \mathrm{x_i} > 0$, где H – матрица кривизны функции Лагранжа [2].

Как показано в [1]: $\partial \mathrm{H}/\partial \mathrm{x_i} = -1/\lambda_i (d\lambda_i / dx_i)$, тогда достаточные условия оптимальности для критериальных функций (1) принимают вид :

$$\text{äëÿ } F_1: \qquad \frac{1}{x_i(1-x_i)} > 0 \qquad - \text{âû ï î ëí ÿþ ò ñÿ âñåãäà};$$

$$\text{äëÿ } F_2: \qquad \frac{\dfrac{x_i^2}{\beta_i} - \dfrac{(1-x_i)^2}{\alpha_i}}{x_i(1-x_i)(u_i - v_i)} > 0 \quad - \text{âû ï î ëí ÿþ ò ñÿ, åñëè} \quad x_i > \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \sqrt{\beta_i}}};$$

$$\text{äëÿ } F_3: \qquad \frac{1}{x_i(1+\alpha_i v_i)} < 0 \qquad - \text{í å âû ï î ëí ÿþ ò ñÿ}.$$

Директивные распределения для задачи разработки проектов.

Выше отмечалось, что если в качестве критерия распределения ресурсов на втором уровне использовать F_2 или F_3, то стационарное решение задачи параметрического синтеза не является эффективным и необходимо использовать директивное распределение. Выбрав структуру последнего в дробно-рациональном виде

$$x = \frac{a + bt}{c + dt} \quad (0 \le t \le 1),$$

получим для произвольного i-го направления проекта с учетом условий $x(0) = 0, x(1) = 1, y = v/(u+v)$

$$x^{dir} = \frac{rt}{rt + \alpha(1-t)}, \quad y^{dir} = \frac{rt}{rt + \beta(1-t)}.$$

Для малых t имееем $\alpha x = \beta y \cong rt$.

Три способа распределения: квазиравных затрат G_i, мощностей $x_i y_i$ или именных множителей Лагранжа λ_i для всех направлений проекта можно объединить требованием

$$r_i = (\alpha_i \beta_i)^k, \tag{2}$$

где $k = 0, 1/2, 1$, соответственно.

Для сравнения директивных распределений с различными значениями r_i оценим локальную эффективность затрат для F_2

$$h = -\frac{dF_2}{dG} = \frac{\sum_i \lambda_i z_i}{\sum_i z_i},$$

где $z_i = (\partial G / \partial x)_i (dx)_i$. Из выражений $x_i = r_i t / A_i$, $y_i = r_i t / B_i$, где $A_i = r_i t + \alpha_i (1-t)$, $B = r_i t + \beta_i (1-t)$ для произвольного i следует

$$dx = \frac{r\alpha}{A^2} dt, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\alpha x + \beta y}{x(1-x)} = \frac{A^2(\alpha x + \beta y)}{r\alpha t(1-t)}, \quad \lambda = \frac{rt(1-t)}{AB}$$

$$h = t(1-t)\frac{\sum_i \left(r\frac{\alpha x + \beta y}{AB} \right)_i}{\sum_i (\alpha x + \beta y)_i}. \qquad (3)$$

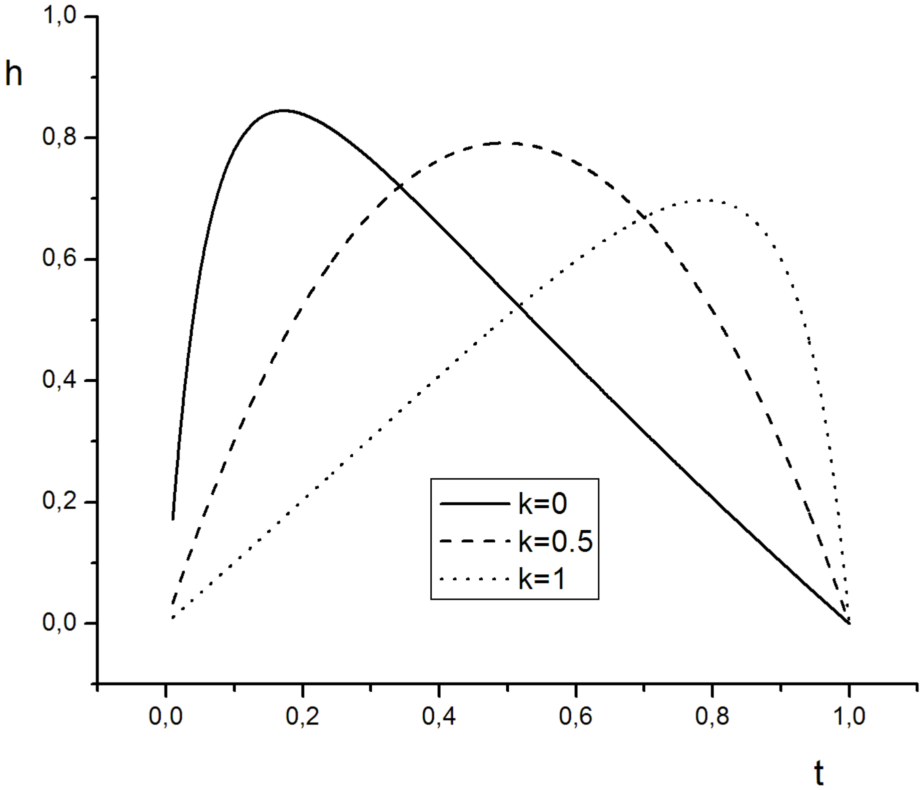

Рис.1. Зависимость h от t при различных k (формулы 2,3).

При малых t имеем

$$\alpha x = \beta y \cong rt, \, AB \cong \alpha\beta$$

$$h \cong t\frac{\sum_i \frac{r_i^2}{\alpha_i \beta_i}}{\sum_i r_i}.$$

Для $r_i > \alpha_i \beta_i$ имеем $h > t$, а для $r_i = \alpha_i \beta_i$,когда $k = 1$, имеем $h = t$, т. е. в начале отрезка $(0 < t < 1)$ кривая зависимости h от t (рис. 1) при $r_i = \alpha_i \beta_i$ ниже других.

При больших t близких к 1

$$\alpha x + \beta y \cong \alpha + \beta, \quad AB \cong r^2$$

$$h \cong (1-t)\frac{\sum_i \left(\frac{\alpha + \beta}{r} \right)_i}{\sum_i (\alpha + \beta)_i}.$$

Для $r_i < 1$ имеем $h > 1-t$, а для $r_i = 1$,когда $k = 0$, имеем $h_0 = 1-t$ независимо от $\alpha_i\beta_i$, т. е. в конце отрезка $(0 < t < 1)$ кривая зависимости h от t (рис.1) при $r_i = 1$ ниже других. Из рис. 1 видно, что на начальном этапе $(t < 0.3)$ наиболее эффективно расходуются средства при квазиравном распределении ($k = 0$), а в конце отрезка ($t > 0.8$) - при квазимагистральном ($k = 1$).

Расчеты для различных r с использованием исходных данных $\alpha = (0.8, 0.2, 0.39, 0.16)$, $\beta = (0.2, 0.8, 0.1, 0.16)$ (коэффициенты α_i и β_i взяты для разных структурных единиц (подразделений, отделов) холдинговой компании «Ленинец») показали (рис.2), что при одинаковых затратах G наилучшее распределение соответствует $r = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ и близкий к нему способ квазиравных затрат, а наихудшее – $r = \sqrt{\alpha\beta} / (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$. Среди трёх способов распределения: квазиравных затрат ($r = 1$), равенства мощностей ($r = \sqrt{\alpha\beta}$), квазимагистрального ($r = \alpha\beta$), наименее эффективен квазимагистральный метод. Следовательно, директивное распределение с $r = 1$, соответствующее равенству удельной эффективности затрат по каждому направлению

$$\mu_i = \frac{1}{x_i y_i}\frac{d(x_i y_i)}{dG_i} = \frac{1-x_i}{\alpha_i x_i} = \frac{1-y_i}{\beta_i y_i} = \frac{1-t}{t},$$

является наилучшим.

На рис. 3 представлена для различных директивных распределений производная мощности подразделения по затратам, т. е. изменение во времени эффективности затрат (множитель Лагранжа) $\lambda_i = \dfrac{dF_i}{dG_i}$. Из рисунка следует, когда израсходовано достаточно мало средств (t < 0,8) эффективность затрат наибольшая при использовании способа квазиравных затрат ($r = 1$) и самая малая – при квазимагистральном методе. С ростом расходов (t > 0,8) эффективности затрат выравниваются.

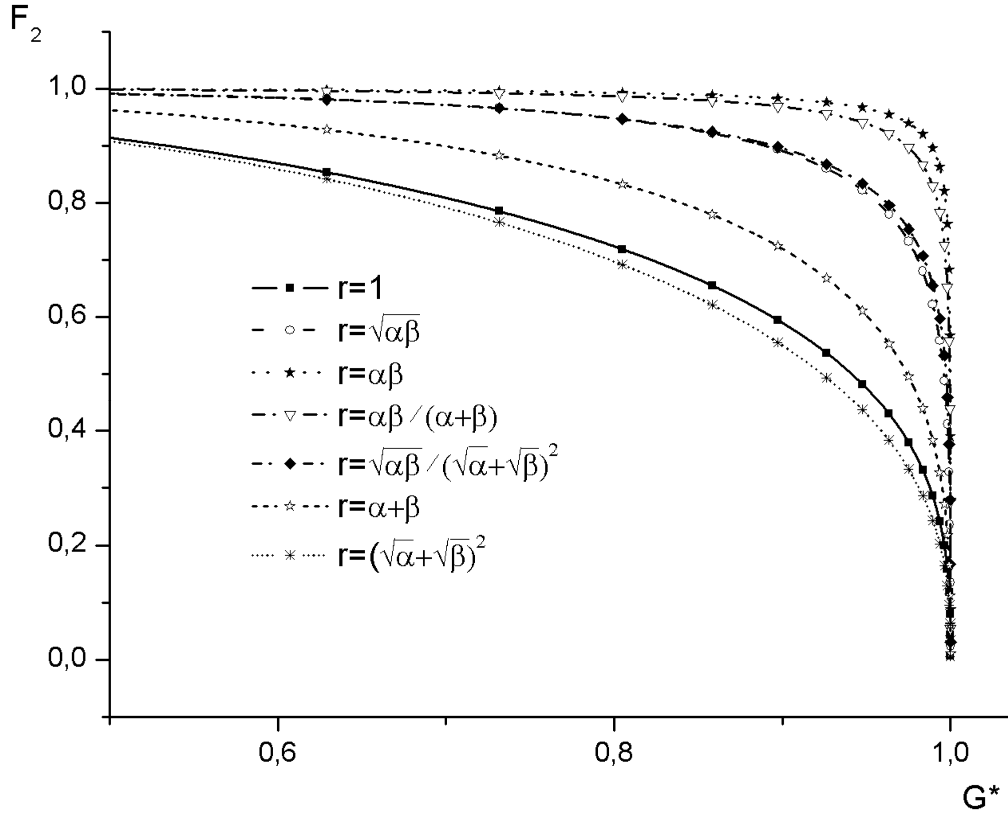

Рис. 2. Нормированная средняя мощность F_2 для различных коэфициентов директивного распределения r в зависимости от нормированных (при r = 1) расходов $G^* = 1 - \exp(-G)$

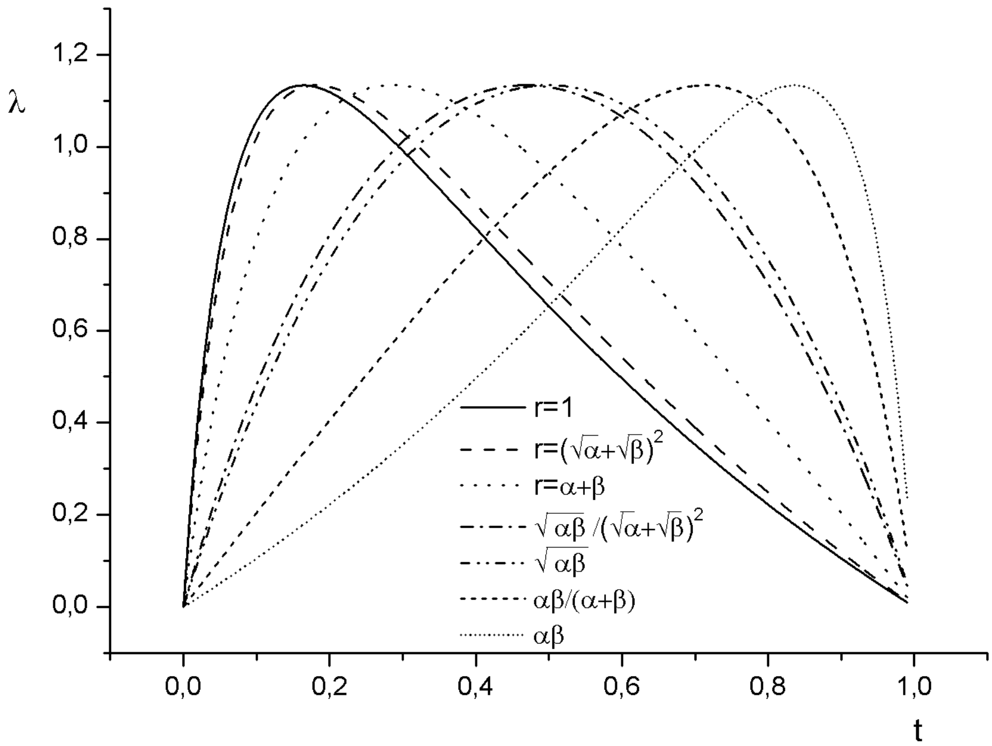

Рис. 3. Множители Лагранжа для различных коэфициентов директивного распределения *r* при $\alpha = 0.39, \beta = 0.1$.

Направления дальнейших исследований рассмотренной группы вопросов связаны:

– с расширением класса и обобщением формулировок задач параметрического синтеза (сочетание магистрального и директивного распределений, модернизация и развитие технических комплексов, корректировка и реализация проектов);

– с расширением структур директивного распределения и критериев его эффективности (использование всей априорной информации и эмпирических гипотез о неконтролируемых параметрах);

– с уменьшением использования недостоверных данных и сопоставлением результатов в условиях минимаксного и байесовского подходов к параметрическому синтезу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Ю. М., Салангин А. А. Системный подход к проектированию сложных систем. // Вестник Херсонского национального технического университета. – Вып. 2(25). – Херсон : ХНТУ, 2006. – с. 466-472.
2. Смирнов Ю.М. Математические методы внешнего проектирования сложных систем. // Информационно управляющие системы. – № 2-3, 2003. – с. 29-44.

А. А. САЛАНГИН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ И НЕОГРАНИЧЕННОМ ВРЕМЕНИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА

Даны обобщение и интерпретация способов директивного решения задачи разработки проекта при ограниченном и неограниченном времени его реализации. Получены обобщенные функции директивных распределений в классе допустимых функций дробно-рационального вида.

В работах [1-3] отмечалось, что если в качестве критерия распределения ресурсов на втором уровне использовать $F_1 = 1 - \prod_i x_i y_i$, $F_2 = 1 - \sum_i x_i y_i$ или $F_3 = \prod_i (1 - x_i y_i)$, то