А.Н.ВЕРХОЗИН

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДОМ ГРАФИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассматривается применение графического дифференцирования в общем курсе физики. На примере расчета скорости и ускорения материальной точки по заданному графику координаты рассмотрены методы графического дифференцирования (*метод приращений* и *метод касательных*). Материал может быть предложен студентам инженерных специальностей, изучающим общий курс физики, в качестве расчетного задания.

Графическим дифференцированием называется графическое отыскание производной. С необходимостью такой процедуры мы сталкиваемся, когда график функции строится на основании эксперимента, а не задан аналитически. Графическое дифференцирование широко применяется в физике. В качестве примера можно привести вычисление дифференциального сопротивления полупроводникового или вакуумного диода. Вольтамперная характеристика диода нелинейна, поэтому его сопротивление зависит от приложенного напряжения, называемого *смещением*. Понятие статического сопротивления (сопротивления постоянному току) в данном случае лишено физического смысла, поэтому вводят понятие дифференциального сопротивления при заданном смещении. Дифференциальное сопротивление R и находится путем дифференцирования экспериментальной вольтамперной характеристики $i = f(u)$.

Графическое дифференцирование применяется также при количественной интерпретации опыта Франка и Герца. Для нахождения закона распределения по энергиям электронов, покидающих катод, дифференцируется вольтамперная характеристика задержки (зависимость силы тока i от задерживающего напряжения $u_з$) вакуумного триода, содержащего пары ртути. Функция распределения есть число частиц ΔN заданной энергии E, приходящихся на интервал энергии ΔE (от E до $E+\Delta E$), или, другими словами, есть производная dN/dE. Для того, чтобы ее получить, необходимо произвести графическое дифференцирование характеристики задержки $i = f(u_з)$, учитывая при этом, что di пропорционально dN и $du_з$ пропорционально dE.

Такой же подход используется для определения дифференциальной магнитной восприимчивости ферромагнетика χ по экспериментально снятой кривой намагничивания $I = f(H)$ – зависимости намагниченности от напряженности магнитного поля. В термодинамике таким путем можно определить температуру T как производную от внутренней энергии U по энтропии S, если известна зависимость $U = f(S)$. Применяется графическое дифференцирование и во многих других случаях.

Приемы графического дифференцирования во всех случаях одинаковы. Рассмотрим их на примере нахождения скорости и ускорения материальной точки по заданному графику координаты.

1. Способы графического дифференцирования достаточно просты. Наиболее простым является «**метод приращений**» [1]. Как известно, скорость есть производная от координаты по времени, а ускорение есть производная от скорости по времени. Метод приращений основан на том, что в течение малого интервала времени Δt можно считать, что координата, скорость и ускорение материальной точки изменяются по линейному закону, и дифференциалы можно заменить конечными приращениями. Можно считать, что средняя скорость и среднее ускорение, вычисленные для такого малого интервала времени, равны истинным их значениям в середине интервала. Таким образом, производные находятся как отношения небольших конечных приращений.

Пусть координата x есть некоторая функция времени t. В случае равнопеременного движения - это парабола, в общем случае – некоторая произвольная кривая $x = x(t)$ (рис. 1, а).

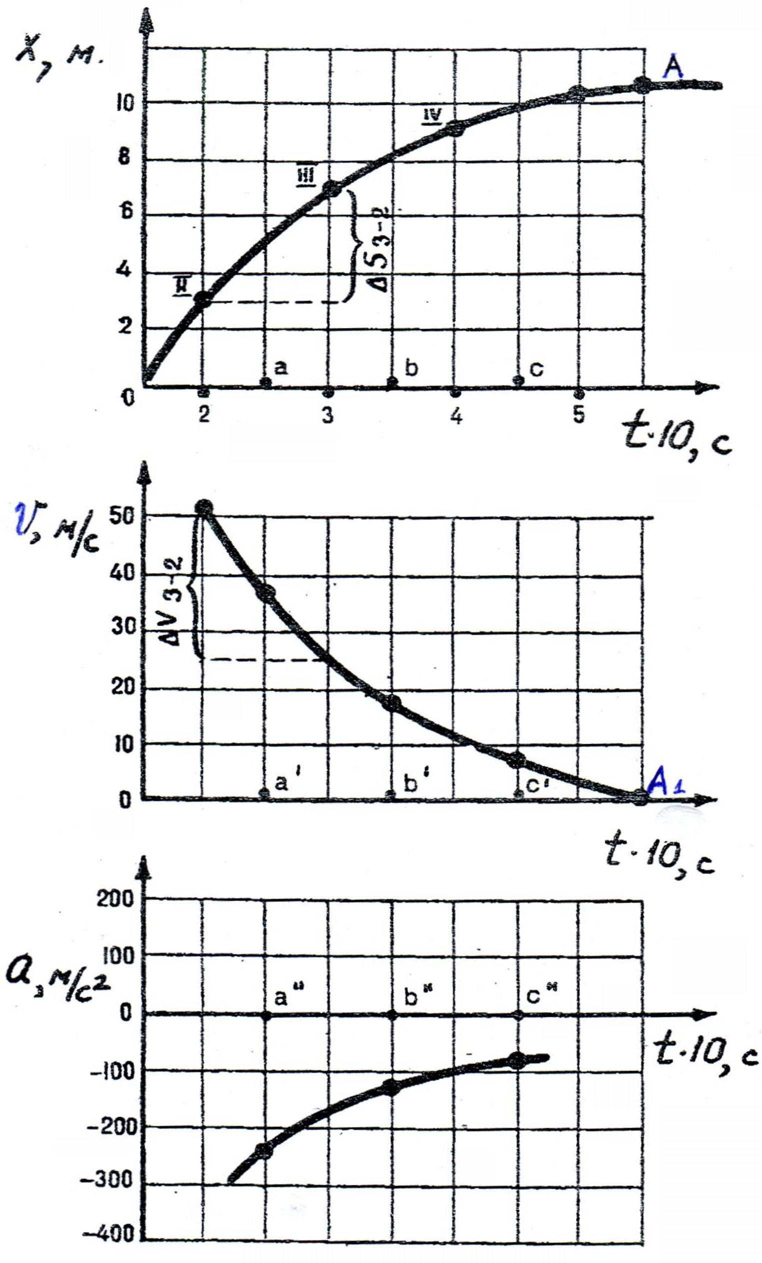

Рис. 1

Разобьем время движения на маленькие интервалы 2-3, 3-4, 4-5. Рассчитаем среднюю скорость на каждом таком участке, относя ее к середине каждого участка, т. е. к моментам времени *a, b* и *c*:

$v_{3\text{-}2}$ = 36 м/с; $v_{4\text{-}3}$ = 16 м/с; $v_{5\text{-}4}$ = 8 м/с.

В точке *A* графика $x = x(t)$ производная равна нулю. Это позволяет получить еще одну надежную точку A_1 на графике скорости.

По этим данным строим график скорости $v = v(t)$ (рис. 1, б).

Дифференцируя точно так же кривую скорости, получим график ускорения (рис. 1, в). Для моментов времени *a′*, *b′* и *c′* имеем соответственно:

$a_{3\text{-}2}$ = -250 м/с^2; $a_{4\text{-}3}$ = -130 м/с^2; $a_{5\text{-}4}$ = -90 м/с^2.

Знак «минус» означает, что скорость с течением времени убывает.

2. Другой метод графического дифференцирования – «***метод касательных***» [2, 3]. Поясним, как выполнить дифференцирование этим методом. Известно, что производная от функции *x(t)* равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой *x(t)* при том же значении аргумента, при котором вычисляется производная. Поэтому после графического построения экспериментальной кривой для вычисления производной в некоторой точке достаточно провести на графике касательную к кривой в той же точке и вычислить ее угловой коэффициент. Конечно, метод весьма чувствителен к точности построения кривой – даже небольшая неточность, допущенная при вычерчивании, может привести к ощутимым ошибкам в производной. Это означает, что исходную экспериментальную кривую следует строить очень тщательно.

Построение касательной «на глаз» очень не точно. Если же задано *направление* касательной (прямая *MN* на рис. 2), то *точка прикосновения A* может быть определена гораздо точнее.

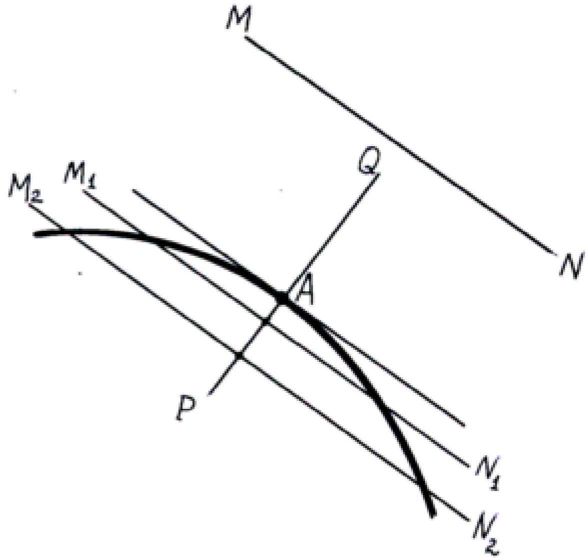

Рис. 2

Построим две хорды M_1N_1 и M_2N_2, параллельные *MN* и пересекающие кривую в близких точках. Прямая *PQ*, проходящая через середины этих хорд, пересечет кривую в точке *A*, касательная к которой имеет заданное направление *MN*.

График производной строится следующим образом. Задаем несколько направлений l_1, l_2, l_3, … касательных, соответствующих рассматриваемому участку кривой (рис. 3).

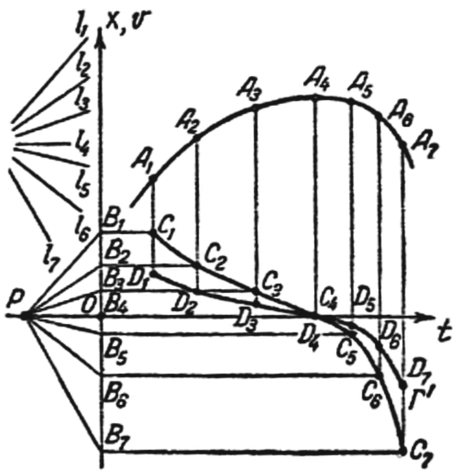

Рис. 3

Определим их точки прикосновения A_1, A_2, A_3 и т. д. так, как было сказано выше (сами касательные строить не надо!). На отрицательной части оси Ot выберем произвольную точку P (полюс). Чем более полого идет кривая, тем дальше от точки O нужно брать точку P. Проводим прямые PB_1, PB_2, PB_3 и т. д., параллельные направлениям l_1, l_2, l_3, …, до пересечения с осью Ox в точках B_1, B_2, B_3,… Через точки B_1, B_2, B_3, … проводим горизонтальные прямые B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, … до пересечения в точках C_1, C_2, C_3, … с соответствующими ординатами точек A_1, A_2, A_3, … Точки C_1, C_2, C_3, … соединяем плавной кривой. Это и будет график производной функции (скорости), если за единицу масштаба по оси Ox взят отрезок $a = MO$. Для построения графика производной в обычном масштабе строим точки D_1, D_2, D_3, …, ординаты которых равны ординатам точек C_1, C_2, C_3, …, деленным на a. Так строится график скорости, дифференцируя который таким же образом, получим график ускорения (на рисунке не показан).

При проведении графического дифференцирования нужно иметь в виду и использовать для проверки полученного результата следующие соображения.

1. Если функция возрастает, то производная положительна. Например, если скорость увеличивается, то ускорение положительно.
2. Если функция убывает, то производная отрицательна. Например, если координата уменьшается, то скорость отрицательна.
3. Если функция постоянна, то производная равна нулю. Например, если скорость постоянна, то ускорение равно нулю.
4. Если функция экстремальна (максимальна или минимальна), то производная равна нулю. Например, если скорость в какой-то момент времени достигла максимума, то это значит, что до этого момента она увеличивалась, а после этого стала уменьшаться. Значит, данный момент означает переход от ускорения к замедлению, а ускорение в данный момент времени обращается в нуль.
5. В точке перегиба функции производная ее либо максимальна, либо минимальна (точка перегиба отделяет участки кривой с разным знаком кривизны).
6. Если функция линейная, то ее производная постоянна. Например, если скорость линейно зависит от времени, то ускорение постоянно.
7. Если функция - кривая второго порядка, то производная линейна; если функция – кривая третьего порядка, то производная – кривая второго порядка.

Задание для расчета

1. Получить от преподавателя график функции $x = x(t)$.
2. Построить графики скорости и ускорения «методом приращений».
3. Построить графики скорости и ускорения «методом касательных».
4. Пояснить качественно, как двигалось тело на отдельных участках траектории.
5. Сопоставить результаты, полученные в пп. 2 и 3. Оценить погрешность результата.

Контрольные вопросы

1. Что называется графическим дифференцированием?
2. В чем заключается «метод приращений»?
3. В чем заключается «метод касательных»?
4. Каковы источники погрешностей при графическом дифференцировании?
5. Приведите примеры из физики, в каких случаях применяется графическое дифференцирование?

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В.А., Гагин Ю.А. Механика спортивных движений. – М.: Физкультура и спорт, 1974. – С. 113-116.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: ГИФМЛ, 1959 (и более поздние издания).
3. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. – ч. 1. – М.: ГИТТЛ, 1953. – С. 159-160.