С.В. ДРОЗДОВ

О ВЫПОЛНЕНИИ ТРЕБОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ МОЩНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Показано, что требование инвариантности мощности, обычно выдвигаемое при решении задач с помощью линейных преобразований переменных, аналогично требованию изометричности линейного преобразования, является ограничением и его не следует считать необходимым.

При решении многих задач значительное упрощение математического описания процессов электромеханического преобразования энергии достигается путём линейных преобразований исходной системы уравнений, при этом осуществляется замена действительных переменных новыми переменными при условии адекватности математического описания физическому объекту. Условие адекватности обычно формулируется в виде требования инвариантности мощности при преобразовании уравнений. Вводимые переменные связаны с реальными переменными формулами преобразования, вид которых должен обеспечить выполнение условия инвариантности мощности [1].

Условие инвариантности электрической мощности:

$$P = \sum_k u_k i_k = \sum_k u_k' i_k' \qquad (1)$$

означает, что формула электрической мощности для исходных напряжений u_k и токов i_k и преобразованных - u_k' и i_k' должна быть инвариантна. Известно [2], что требование инвариантности мощности будет удовлетворено, если в качестве матрицы линейного преобразования используются ортогональные или унитарные матрицы.

Использование ортогональных (унитарных) матриц для линейных преобразований переменных с целью выполнения требования инвариантности мощности является ограничением, вынуждающим прибегать к дополнительным разъяснениям и поискам физического смысла в том случае, если для решения задачи более удобны неортогональные матрицы преобразования переменных.

Рассмотрим вопрос подробнее на примере α, β преобразования переменных трёхфазной синхронной машины [3]. Связь между преобразованными токами статора i_o, i_α, i_β и исходными токами i_a, $i_в$, i_c имеет вид:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Такому же преобразованию подвергается фазное напряжение статора u_a, $u_в$, u_c . Матрица преобразования не ортогональна, поэтому формула мощности для новых переменных имеет вид отличный от (1):

$$P = \frac{3}{2}\left(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta\right) + 3u_0 i_0 \qquad (3)$$

Требование инвариантности мощности не выполняется. Появление коэффициентов отличных от единицы в (3) физически объясняют переходом от трехфазной машины к двухфазной. Уравнения синхронной машины принимают вид отличный в физическом смысле от исходных уравнений [3]. Подобные результаты и приводят к требованию инвариантности мощности, как это сформулировано выше.

Рассмотрим преобразование (2) с позиции линейной алгебры, поскольку такое преобразование можно трактовать, как преобразование координат вектора $\bar{i}$ при замене системы координат. В исходной системе координат введем базис $\bar{e}_a$, $\bar{e}_b$, $\bar{e}_c$. При этом можно считать координаторы вектора тока i_a, $i_в$, i_c имеющими ту же размерность, что вектор $\bar{i}$, а базис $\bar{e}_a$, $\bar{e}_b$, $\bar{e}_c$ безразмерным, либо координаты вектора $\bar{i}$ безразмерными, а векторы базиса $\bar{e}_a$, $\bar{e}_b$, $\bar{e}_c$ имеющими ту же размерность, что вектор $\bar{i}$.

Первый вариант является более универсальным, поскольку позволяет пользоваться в одном базисе векторами различных размерностей. Примем его для дальнейшего изложения. Так как мощность не должна зависеть от выбора системы координат для $\bar{u}$ и $\bar{i}$, определим ее как скалярное произведение

$$P = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c \qquad (4)$$

тем самым в линейном пространстве вводится метрика:

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где [g] фундаментальная метрическая матрица в системе координат *a, b, c*. В новой системе координат $0,\ \alpha,\ \beta$ метрическая матрица как следует из преобразования (2) принимает вид:

$$[g'] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

а скалярное произведение $\bar{u}\ *\ \bar{i}$ –

$$P = g_{oo} u_o i_o + g_{\alpha\alpha} u_\alpha i_\alpha + g_{\beta\beta} u_\beta i_\beta \qquad (7)$$

принимает вид (3). Таким образом, появление в (3) коэффициентов отличных от единицы находится в полном соответствии с выполненным преобразованием координат. Можно сказать, что используемая математическая модель адекватна физическому объекту.

Заметим, что для физических компонентов векторов токов и напряжений: $\hat{i}_o = \sqrt{g_{oo}}\, i_o$ $\hat{i}_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\, i_\alpha$ $\hat{i}_\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}}\, i_\beta$ $\hat{u}_o = \sqrt{g_{oo}}\, u_o$ $\hat{u}_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\, u_\alpha$ $\hat{u}_\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}}\, u_\beta$ формула мощности сохраняет исходный вид:

$$P = \hat{u}_o \hat{i}_o + \hat{u}_\alpha \hat{i}_\alpha + \hat{u}_\beta \hat{i}_\beta\,. \qquad (8)$$

При использовании второго подхода, когда физическая размерность присваивается векторам базиса, можно говорить об изменении физических единиц измерения. В новой системе координат фазные токи имеют размерности $\left[\sqrt{3}A\right]$, $\left[\sqrt{3/2}A\right]$ $\left[\sqrt{3/2}A\right]$, а напряжения – $\left[\sqrt{3}B\right]$, $\left[\sqrt{3/2}B\right]$ $\left[\sqrt{3/2}B\right]$ для осей $0,\ \alpha,\ \beta$ соответственно.

Ортогональные матрицы преобразования переменных дают преимущество в вычислительном аспекте, поскольку обратная матрица, в этом случае находится транспонированием преобразующей матрицы. Такое преобразование сохраняет метрические свойства линейного пространства (изометрическое преобразование) и поэтому уравнение физического объекта сохраняет исходный вид (в физическом смысле). Вместе с тем, требования изометричности преобразования (инвариантности мощности) является ограничением и его не следует считать необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ключев В.И.** Теория электропривода – М.: Энергоатомиздат, 1998. – с.704
2. **Уайт Д., Вудсон Г**. Электромеханические преобразования энергии - М.; Л.: Энергия, 1964, с. 407 - 457.
3. **Важнов А.И.** Переходные процессы в машинах переменного тока – Л.: Энергия, 1980, с. 256