ЛИТЕРАТУРА
1. **Воронков С.С.** О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Труды ППИ, - № 7.1. 2003. - С. 24-30.
2. **Воронков С.С.** Зависимость скорости звука в потоке вязкого газа от различных факторов. Сборник трудов XVI сессии Российского акустического общества, - М.: ГЕОС, 2005, - Т. 1. – С. 262-265.
3. **Фабрикант Н.Я.** Аэродинамика. – М.: Наука, 1964. - С. 814.
4. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. 5-е изд. - М.: Наука, 1978. - С. 736.
5. **Линь Цзя-цзяо** Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Ин. литература, 1958. – 194 с.
6. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. – М.: Мир, 1971. – 350 с.
7. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. – 712 с.
8. **Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.

Ю.К. ГОЛИКОВ, Ю.И. ПЕТРОВ

ПОЛНАЯ И ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИПОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ МОМЕНТОМ

Определены классы двумерных лапласовых полей, а также соответствующие криволинейные ортогональные координаты, допускающие полное либо частичное интегрирование уравнений движения жестких диполей.

Точное решение динамической задачи движения заряженных и нейтральных поляризованных частиц во внешних электростатических полях играет важную роль применительно к различным физическим проблемам. Все двумерные электростатические поля, в которых возможно интегрирование уравнений движения заряженных частиц методом разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, определены в работе [1], а для точечных диполей с индуцированным моментом - в работе [2]. Классы полей с проинтегрированными уравнениями движения значительно расширены в работах [3, 4] за счет отказа от полной интегрируемости. В указанных работах получены двумерные гармонические потенциалы и конформные координаты, в которых возможная запись семейств траекторий в квадратурах для заряженных частиц и упругих диполей при фиксированной полной энергии.

В настоящей работе решена задача выделения двумерных полей, в которых возможно полное либо частичное интегрирование уравнений движения жестких диполей в двумерных гармонических полях. Уравнение Гамильтона-Якоби точечного диполя с постоянным моментом, находящимся в поле с потенциалом $\varphi(x, y)$ и обладающим энергией E, имеет вид:

$$\frac{Sx^2 + Sy^2}{2} = \sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2} + E\,. \tag{1}$$

Знание полного интеграла для укороченного действия S, содержащего кроме E еще одну произвольную постоянную α, позволяет записать уравнение траекторий в виде:

$$S_\alpha = \beta = const\,. \tag{2}$$

Осуществляя точечное преобразование гамильтониана к конформным координатам $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, получим уравнение Гамильтона-Якоби в новых переменных

$$2S_z S_{\bar{z}} = \sqrt{\Phi_z \overline{\Phi}_{\bar{z}}} + E\,, \tag{3}$$

где $\Phi = \psi + i\varphi$ - комплексный потенциал поля.

При переходе к конформным координатам u, v, в которых координаты x, y, определяются через комплексные переменные $z = x + iy$ и $\omega = u + iv$, уравнение (3) принимает вид

$$2S_{\omega}S_{\overline{\omega}} = \sqrt{z_{\omega}\Phi_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}}\overline{\Phi}_{\overline{\omega}}} + Ez_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}} . \tag{4}$$

Задача определения полевых структур с полной интегрируемостью уравнений движения сводится к решению системы дифференциально-функциональных уравнений

$$\begin{cases} z_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}} = A(u) + B(v); \\ \sqrt{z_{\omega}\Phi_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}}\overline{\Phi}_{\overline{\omega}}} = M(u) + N(v). \end{cases} \tag{5}$$

В работе [1] определены все виды конформных координат, в которых возможно приведение гамильтониана к лиувиллевой структуре. Используя каноническую форму найденных координат и развитый метод применения дифференциальных операторов для решения уравнений (5), получим выражения для комплексных потенциалов.

Декартовы координаты $z = \omega$:

$$\Phi = c_1^2 \frac{z^3}{3} + c_1c_2z^2 + c_2^2 z + c_3 ; \tag{6}$$

$$\Phi = \frac{1}{\lambda}\left(c_1^2 e^{\lambda z} - c_2^2 e^{-\lambda z}\right) + 2c_1c_2 z + c_3 . \tag{6a}$$

Здесь и далее c_1, c_2, c_3 - произвольные комплексные постоянные, $\lambda \neq 0$ - вещественный параметр.

Параболические координаты $z = \frac{1}{2}\omega^2$:

$$\Phi = c_1^2 \frac{\omega^2}{2} + 2c_1c_2\omega + c_2^2 \ln\cdot c_3\omega ; \tag{7}$$

$$\Phi = c_1^2 \int \frac{e^{\lambda\omega}}{\omega} d\omega + c_2^2 \int \frac{e^{-\lambda\omega}}{\omega} d\omega + 2c_1c_2 \ln c_3\omega. \tag{7a}$$

Полярные координаты $z = e^{\omega}$:

$$\Phi = c_1^2 e^{-\omega}\left[\omega^2 + 2(\omega+1)\right] + 2c_1c_2e^{-\omega}(\omega+1) + c_2^2 e^{-\omega} + c_3 ; \tag{8}$$

$$\Phi = \frac{c_1^2}{\lambda-1}e^{(\lambda-1)\omega} - \frac{c_2^2}{\lambda+1}e^{-(\lambda+1)\omega} - 2c_1c_2e^{-\omega} + c_3 ;\ \lambda \neq \pm 1 . \tag{8a}$$

При $\lambda = \pm 1$

$$\Phi = c_1^2\omega - \frac{c_2^2}{2}e^{-2\omega} - 2c_1c_2e^{-\omega} + c_3 . \tag{8б}$$

Эллиптические координаты $z = sh\omega$:

$$\Phi = \int \frac{c_1\omega^2 + 2c_1c_2\omega + c_2}{ch\omega} d\omega + c_3 ; \tag{9}$$

$$\Phi = \int \frac{c_1^2 e^{\lambda\omega} + c_2^2 e^{-\lambda\omega} + 2c_1c_2}{ch\omega} . \tag{9a}$$

Лапласовы потенциалы получаются отделением мнимых частей полученных выражений и входят как частные случаи в структуры полей, допускающих изоэнергетическое интегрирование. Определение полевых структур и соответствующих конформных координат приводит к функциональному уравнению:

$$\sqrt{z_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}}\Phi_{\omega}\overline{\Phi}_{\overline{\omega}}} + Ez_{\omega}\overline{z}_{\overline{\omega}} = I(u) + K(v) , \tag{10}$$

в котором энергия $E \neq 0$ считается известной, комплексный потенциал представим через вспомогательную функцию $Q(\omega)$

$$\Phi = \int \frac{Q^2}{z_{\omega}} d\omega . \tag{11}$$

Перечислим полученные результаты.

Случай 1

$$z = b_1 e^{\sqrt{\lambda\omega}} + b_2 e^{-\sqrt{\lambda\omega}} \; ;$$

$$Q = c_1 e^{\sqrt{\mu\omega}} + c_2 e^{-\sqrt{\mu\omega}} \, . \tag{12}$$

где b_1, b_2, c_1, c_2 - произвольные комплексные, λ и μ - вещественные постоянные.

Случай 2

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\lambda - i\beta} \sum_{j=1}^{4} \frac{k_j^3 - \mu}{k_j} \cdot b_j e^{k_j\omega} + b_5 \; ;$$

$$Q = 2\sum_{j=1}^{4} k_j b_j e^{k_j\omega} \, , \tag{13}$$

где k_j - корни уравнения

$k^4 - (\lambda + \mu)k^2 + \lambda\mu - \alpha^2 - \beta^2 = 0$ при условии $(\lambda - \mu)^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$.

Случай 3

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}(\lambda - i\beta)}\left(\lambda b_1 e^{\sqrt{\lambda+\mu\omega}} + \lambda b_2 e^{-\sqrt{\lambda+\mu\omega}} - \mu b_3\omega^2 - \mu b_4\omega\right) + b_5 \; ;$$

$$Q = 2\sqrt{\lambda + \mu} b_1 e^{\sqrt{\lambda+\mu\omega}} - 2\sqrt{\lambda + \mu} e^{-\sqrt{\lambda+\mu\omega}} + 4b_3\omega + 2b_4 \, . \tag{14}$$

Случай 4

$$z = \frac{1+i}{\lambda\sqrt{E}}\left(b_1 e^{\omega} + b_2 e^{-\omega}\right) + b_5 \; ;$$

$$Q = \left(b_1\omega + b_2\right)e^{\omega} + \left(b_3\omega + b_4\right)e^{-\omega} \, . \tag{15}$$

Комплексные потенциалы определяются по формуле (11) и исчерпывают все случаи частичного интегрирования. В заключение получим уравнение траектории в произвольном поле $\varphi(x,y) = \mathrm{Im}\,\varphi(z)$ при нулевой полной энергии. Введем функцию $R(z) = r_1(x,y) + ir_2(x,y)$, где $r_1(x,y)$ и $r_2(x,y)$ гармонически сопряженные функции, посредством формулы:

$$R(z) = \int \sqrt{\Phi_z(z)}dz \, . \tag{16}$$

Неполное действие $S(x,y,a)$ легко найти в виде

$$S = \sqrt{2}\left(\cos a \cdot r_1(x,y) + \sin a \cdot r_2(x,y)\right), \tag{17}$$

откуда траектории получаются по формуле (2)

$$\cos a \cdot r_2(x,y) - \sin a \cdot r_1(x,y) = \beta \, . \tag{18}$$

Отметим, что полученные результаты применимы для описания движения магнитных диполей в магнитном поле в виду их полной математической аналогии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Голиков Ю.К., Коломенков В.Ю.** Двумерные электростатические поля, допускающие точное аналитическое решение уравнений движения заряженной частицы. - СПб. "Физическая электроника". Труды ЛПИ, 1977, № 356, - С. 95-99.
2. **Матышев А.А.** Интегрируемые задачи динамики дипольных частиц. - ЖТФ, 1979, т. 49, вып. 3, - С. 454-499.
3. **Голиков Ю.К., Коломенков В.Ю.** Частично интегрируемые случаи нерелятивистского движения заряженных частиц в двумерных электростатических полях. - ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 10, - С. 2061-2065.
4. **Голиков Ю.К., Матышев А.А.** К вопросу о пространственной фокусировке дипольных частиц. - ЖТФ, 1981, т. 51, вып. 1, - С. 211-215.