

чит, не достаточно убедительное. В таком случае эта статья – лишь первый шаг в указанном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1974. – С. 408-453.
2. Волькенштейн М.В., Шаронов Ю.А. Эффект Фарадея и его применение в биологии // Природа. -1977. - № 5. – С. 30-41.
3. Верховин А.Н. Магнитооптика слабомагнитных молекулярных систем. – Спб.: Изд-во Политех. ун-та, 2006. – С. 203-206.

С.С.ВОРОНКОВ

О ДОПУЩЕНИЯХ, ПРИНИМАЕМЫХ ПРИ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Установленная в работах [1,2] зависимость скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом от диссипации энергии и теплообмена ставит под сомнение обоснованность допущения о несжимаемости среды, принимаемого при теоретическом анализе перехода к турбулентности. Приводятся результаты вычислительного и натурного экспериментов.

В [1] получена формула для скорости звука в потоке вязкого газа с учетом диссипации энергии и теплообмена

$$a^2 = a_s^2 + \frac{\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} \rho) + (k-1)\Phi}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}, \quad (1)$$

где a - скорость звука, a_s - адиабатное значение скорости звука, p и ρ - давление и плотность газа, \mathbf{V} – вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; Φ - функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен в потоке, k – показатель адиабаты, t – время.

Если в покоящемся газе, как показано в [2], вторым членом в формуле (1) можно пренебречь и считать процесс распространения звука адиабатным, то в движущемся потоке вязкого газа с поперечным сдвигом возникает интенсивная диссипация энергии и пренебречь вторым членом в формуле (1) не представляется возможным.

Скорость звука, помимо того, что она является скоростью распространения малых акустических возмущений, является также характеристикой физических свойств жидкости и газа, таких как сжимаемость и упругость.

Действительно, скорость звука a связана с модулем упругости E и коэффициентом сжимаемости β следующими соотношениями [3]

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (2)$$

$$a^2 = \frac{1}{\rho\beta}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что чем более сжимаема среда, тем меньше скорость звука, и, наоборот, для несжимаемой среды $a = \infty$.

Установленная в работах [1,2] существенная зависимость скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом от диссипации энергии и теплообмена, с учетом соотношений (2), (3), свидетельствует о зависимости сжимаемости и упругости газа от процессов, происходящих в этой среде. В потоке вязкого газа с поперечным сдвигом сжимаемость и упругость среды уже нельзя считать постоянными величинами, как это принято в линейных моделях, так как они изменяются от точки к точке. В потоке вязкого газа

с поперечным сдвигом сжимаемость и упругость среды зависят от интенсивности возмущения, частоты, скорости потока и на определенных участках претерпевают разрывы.

Представляется важным учет установленных закономерностей при анализе перехода ламинарного режима течения в турбулентный в сдвиговом течении вязкого газа. Современная теория перехода к турбулентности, как правило, рассматривает процесс перехода в приближении несжимаемости среды, что автоматически исключает из рассмотрения установленные закономерности. Первоначально теория гидродинамической устойчивости (уравнение Орра - Зоммерфельда), описывающая начальную стадию перехода, была разработана для несжимаемой жидкости. Модель несжимаемой жидкости широко используется в гидродинамике. Преимущество этого приближения заключается в упрощении исходной системы уравнений. Если для полной системы уравнений 6 неизвестных переменных (u, v, w – проекции скорости газа на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно, p – давление, ρ – плотность, T – температура), то для несжимаемой жидкости в 3-х мерном случае количество неизвестных переменных уменьшается до 4 – u, v, w, p . Действительно, под несжимаемой жидкостью понимается жидкость, плотность которой постоянна ($\rho = \text{const}$). Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (4)$$

получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Уравнения Навье – Стокса совместно с уравнением (5) описывают модель несжимаемой жидкости (4 уравнения – 4 неизвестных). При этом отпадает необходимость в уравнении энергии, что значительно упрощает исходную систему уравнений.

Реальные жидкости все сжимаемы. Меньше сжимаемость у капельных жидкостей (коэффициент сжимаемости воды $\beta = 4,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2 / \text{Н}$), больше сжимаемость у газов (коэффициент сжимаемости воздуха $\beta = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{Н}$). Газы в первом приближении при умеренных скоростях также можно рассматривать как несжимаемые. Это следует из того, что изменение плотности в газах зависит от числа Маха ($M = u/a$) /4/

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \dots \quad (6)$$

Оценки показывают [4], что если допустить относительную ошибку за счет неучета сжимаемости газа, равную 1 %, то это приводит к ограничению скорости для воздуха $u < 50 \text{ м/с}$.

Но модель сжимаемой жидкости, помимо переменного значения плотности, включает в себя и акустические волны. Предполагая жидкость несжимаемой, мы акустические волны исключаем. Действительно, запишем уравнение неразрывности (4) с учетом формулы для скорости звука

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (7)$$

в виде

$$\frac{1}{a^2} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (8)$$

и решим его относительно дивергенции скорости

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho a^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (9)$$

Так как давление в жидкости – переменная величина, то для выполнения условия (5) необходимо, чтобы скорость звука была бесконечна $a = \infty$.

Таким образом, модель несжимаемой жидкости исключает из рассмотрения акустические волны.

В середине XX века в связи с запросами авиационной техники начато исследование влияния сжимаемости жидкости на переход ламинарной формы течения в турбулентную [5,6,7]. Влияние сжимаемости определяется в основном, как отмечает Шлихтинг, числом Маха. Было установлено [5,6,7], что для теплоизолированной стенки влияние сжимаемости на устойчивость пограничного слоя при умеренных числах Маха незначительно.

Подход, применяемый к разработке теории устойчивости сжимаемой жидкости [5], остался аналогичным тому, который применяется в несжимаемом случае. Возмущения рассматриваются как малые, и осуществляется линеаризация исходной системы уравнений. В случае сжимаемой жидкости добавляются [5,6] возмущения плотности и температуры (или энтропии). Но при линеаризации исходных уравнений, в особенности уравнения энергии, происходит разрыв связей между основным потоком и акустическими волнами, реализуемых через скорость звука. Установленная нами зависимость скорости звука в потоке вязкого газа от диссипации энергии и теплообмена ставит под сомнение правомерность такого подхода.

В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено [1,2], что амплитуда изменения скорости звука зависит от амплитуды возмущения плотности, скорости потока, частоты и изменяется в фиксированный момент времени как вдоль канала, так и поперек - рис. 1.

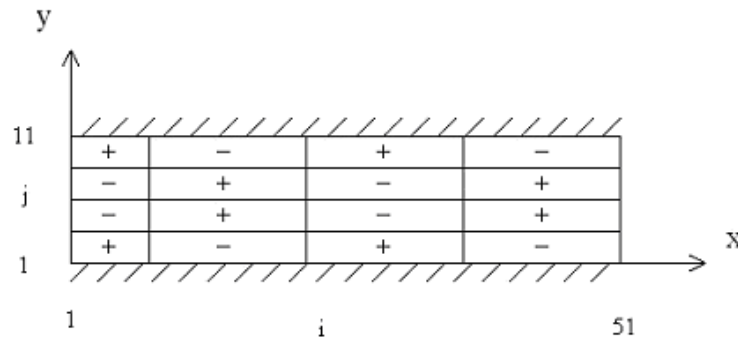


Рис. 1

На рис. 1 «+» обозначены области в плоском канале, в которых в данный момент времени значение скорости звука больше адиабатного значения на величину амплитуды скорости звука, соответственно «-» – области в плоском канале, в которых в данный момент времени значение скорости звука меньше адиабатного значения на величину амплитуды скорости звука. Амплитуда изменения скорости звука зависит от скорости потока по закону, приведенному на рис.2 [1].

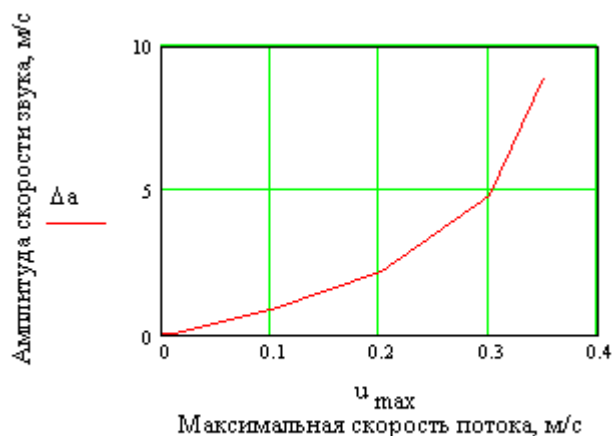


Рис. 2

Этот закон, как следует из рис. 2, близок к квадратичному. Анализ изменения скорости звука в плоском канале - рис. 1 - показывает, что в определенные моменты времени в центре канала и вблизи стенки возникают зоны – «каналы» акустической проводимости, в которых скорость звука выше адиабатного значения. Причем превышение скорости звука над адиабатным значением, как следует из рис. 2, зависит от скорости потока. С увеличением скорости потока, и соответственно, числа Рейнольдса, так как число Рейнольдса определяется по формуле

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu}, \quad (10)$$

где u – среднерасходная скорость потока, d – внутренний диаметр, ν - коэффициент кинематической вязкости; будет возрастать амплитуда скорости звука. Акустические возмущения, присутствующие в потоке, будут с большей скоростью распространяться по зонам проводимости, что приведет к возникновению поперечных градиентов давления в канале и возникновению завихренности потока.

Для проверки установленного в вычислительном эксперименте механизма возникновения завихренности потока, связанного с зависимостью скорости звука и сжимаемости среды от параметров потока, был проведен натурный эксперимент, представляющий собой модифицированный опыт Рейнольдса – рис. 3. Вода в напорный бак подается из водопровода. Объем напорного бака составляет $V = 0,023 \text{ м}^3$. В отличие от классического опыта Рейнольдса, в нашей установке создаются две подкрашенные струйки, расположенные у стенок трубы на расстоянии 3 мм. Для этого используются две медицинские иглы с внутренним диаметром 0,4 мм. Внутренний диаметр трубы составляет $d_{\text{вн}} = 14 \text{ мм}$, длина трубы $l = 1,2 \text{ м}$. Для устранения жесткой связи между напорным баком и трубой используется резиновая вставка, исключаяя передачу вибраций от бака к трубе.

Режим движения жидкости фиксировался визуально. При числах Рейнольдса $Re < 2000$ режим движения - ламинарный. Струйки движутся параллельно, не перемешиваясь, как показано на рис. 3. В области чисел Рейнольдса $2000 \div 3000$ наблюдается переход от ламинарного режима движения жидкости к турбулентному. При числах Рейнольдса $Re > 3000$ наблюдается развитый турбулентный режим движения. Цель проведения эксперимента заключалась в выявлении характера распространения возмущений, вносимых в поток искусственно, а также при естественном переходе. В вычислительном эксперименте установлено (рис. 1), что в центре канала и у стенок существуют зоны акустической проводимости, в которых скорость звука выше адиабатного значения на величину амплитуды скорости звука. При чем эти зоны располагаются симметрично относительно оси канала - рис. 1. Следовательно, при внесении искусственных возмущений в поток подкрашенные струйки будут искажаться также симметрично относительно оси.

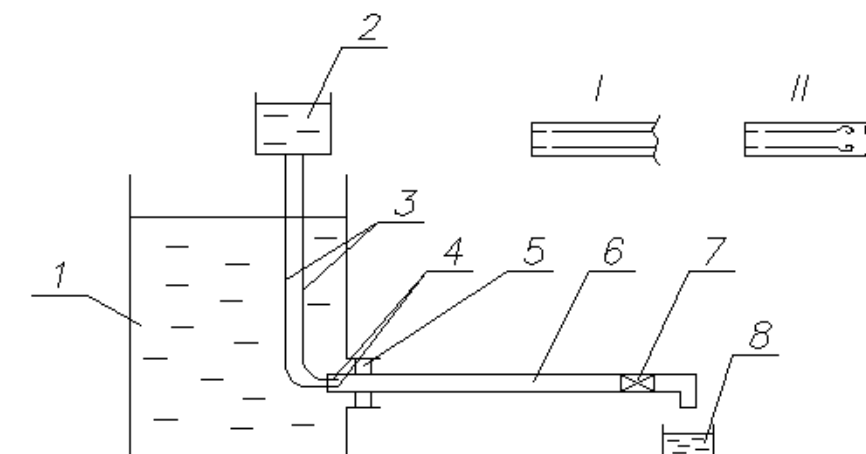


Рис. 3. Модифицированный опыт Рейнольдса

I – ламинарный режим; II – переходный режим;

1 – напорный бак, заполненный водой; 2 – емкость с чернилами;

3 – трубки для подачи чернил; 4 – две медицинские иглы;

5 – резиновая вставка; 6 – труба из оргстекла; 7 – вентиль; 8 – мерная емкость.

Искусственное возмущение вносилось в поток резким единичным ударом по баку. При этом в области чисел Рейнольдса $1000 \div 3000$ возникают симметричные вихревые структуры, показанные на рис. 3 II – переходный режим, сносящиеся затем вниз по потоку. При числах Рейнольдса $Re < 1000$ вихревые структуры не возникают, и подкрашенные струйки движутся параллельно, не перемешиваясь. Это объясняется тем, что амплитуда скорости звука зависит от скорости потока – рис. 2, и соответственно, от числа Рейнольдса. При этих числах Рейнольдса среднерасходная скорость воды составляет $0,07$ м/с и амплитуды скорости звука незначительны. В области чисел Рейнольдса $2000 \div 3000$ при естественном переходе возникающие вихревые структуры также являются симметричными относительно оси трубы.

Во второй половине XX века в ряде работ, которые анализируются в [8], было установлено влияние акустических возмущений на переход пограничного слоя. Авторы работы [8] пришли к выводу: «...имеющиеся в настоящее время теоретические и экспериментальные данные показывают, что распределенная генерация волн Толмина – Шлихтинга в пограничном слое акустическим полем, как и следовало ожидать, мала по сравнению с трансформацией звука на локальных неоднородностях». Недооценка влияния акустических возмущений на переход к турбулентности обусловлена непониманием механизма воздействия. Необходимо пересмотреть допущения, принимаемые при теоретическом анализе перехода.

Выводы:

1. При описании перехода к турбулентности даже при числах Маха, значительно меньших единицы $M \ll 1$, необходимо учитывать сжимаемость среды и акустические волны. Линеаризация исходных уравнений в теории гидродинамической устойчивости сжимаемой жидкости ведет к разрыву связей между основным потоком и акустическими возмущениями, выражаемых в зависимости скорости звука в сдвиговом течении от диссипации энергии и теплообмена. Поэтому от линеаризации исходных уравнений при анализе перехода к турбулентности необходимо отказаться.

2. Установлено, что при числах Рейнольдса, соответствующих переходу к турбулентности, в центре канала и вблизи стенки возникают зоны – «каналы» акустической проводимости, в которых скорость звука выше адиабатного значения. Акустические возмущения, присутствующие в потоке, с большей скоростью распространяются по зонам проводимости, что приводит к возникновению поперечных градиентов давления в канале и возникновению симметричных вихревых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронков С.С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Труды ППИ, - № 7.1. 2003. - С. 24-30.
2. Воронков С.С. Зависимость скорости звука в потоке вязкого газа от различных факторов. Сборник трудов XVI сессии Российского акустического общества, - М.: ГЕОС, 2005, - Т. 1. - С. 262-265.
3. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. - М.: Наука, 1964. - С. 814.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 5-е изд. - М.: Наука, 1978. - С. 736.
5. Линь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. - М.: Ин. литература, 1958. - 194 с.
6. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. - М.: Мир, 1971. - 350 с.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
8. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. - Новосибирск: Наука, 1982. - 151 с.

Ю.К. ГОЛИКОВ, Ю.И. ПЕТРОВ

ПОЛНАЯ И ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИПОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ МОМЕНТОМ

Определены классы двумерных лапласовых полей, а также соответствующие криволинейные ортогональные координаты, допускающие полное либо частичное интегрирование уравнений движения жестких диполей.

Точное решение динамической задачи движения заряженных и нейтральных поляризованных частиц во внешних электростатических полях играет важную роль применительно к различным физическим проблемам. Все двумерные электростатические поля, в которых возможно интегрирование уравнений движения заряженных частиц методом разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, определены в работе [1], а для точечных диполей с индуцированным моментом - в работе [2]. Классы полей с проинтегрированными уравнениями движения значительно расширены в работах [3, 4] за счет отказа от полной интегрируемости. В указанных работах получены двумерные гармонические потенциалы и конформные координаты, в которых возможная запись семейств траекторий в квадратурах для заряженных частиц и упругих диполей при фиксированной полной энергии.

В настоящей работе решена задача выделения двумерных полей, в которых возможно полное либо частичное интегрирование уравнений движения жестких диполей в двумерных гармонических полях. Уравнение Гамильтона-Якоби точечного диполя с постоянным моментом, находящимся в поле с потенциалом $\varphi(x, y)$ и обладающим энергией E , имеет вид:

$$\frac{Sx^2 + Sy^2}{2} = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} + E. \quad (1)$$

Знание полного интеграла для укороченного действия S , содержащего кроме E еще одну произвольную постоянную α , позволяет записать уравнение траекторий в виде:

$$S_\alpha = \beta = const. \quad (2)$$

Осуществляя точечное преобразование гамильтониана к конформным координатам $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, получим уравнение Гамильтона-Якоби в новых переменных

$$2S_z S_{\bar{z}} = \sqrt{\Phi_z \overline{\Phi_{\bar{z}}}} + E, \quad (3)$$

где $\Phi = \psi + i\varphi$ - комплексный потенциал поля.

При переходе к конформным координатам u, v , в которых координаты x, y , определяются через комплексные переменные $z = x + iy$ и $\omega = u + iv$, уравнение (3) принимает вид