Значение параметра **t** , при котором доходы правительства максимальны находим из уравнения **(8)** : $\mathbf{t^0 = -1/42}$. Доходы правительства при данном оптимальном тарифе $\mathbf{G(-1/42) = 5{,}95\ 10^{-3}}$. Чтобы показать, что в точке $\mathbf{t^0 = -1/42}$ действительно наблюдается максимум, найдем $\mathbf{G(0) = 5{,}86\ 10^{-3}}$.

4. Заключение

В статье представлена двухуровневая модель импорта монопольной продукции. Показано, что для привлечения монополии на внутренний рынок и увеличения объема продаж может быть выгодно устанавливать значительную плату за лицензию и при этом доплачивать внешнему экспортеру за каждую единицу проданного товара.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fuerst S.Timothy , Kim H. Kyoo.** Two parts trade policy under imperfect competition. To appear in "Review of International Economics" (forth coming).

А.Н.ВЕРХОЗИН

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА В ОБЩЕМ КУРСЕ ФИЗИКИ

Задача двух тел, называемая иначе задачей Кеплера, является одной из частных задач небесной механики и состоит в определении движения двух тел, притягивающихся друг к другу по закону тяготения Ньютона. В общем случае, когда необходимо учитывать неоднородность взаимодействующих тел и возмущения, задача точного решения не имеет. Если же взаимодействующие тела могут рассматриваться как материальные точки, а возмущением можно пренебречь, то задача решается точно (в конечном виде), а соответствующее решение называется *невозмущенным* или *кеплеровым.* Такой случай, например, реализуется для систем "Солнце + планета", "планета + искусственный спутник", "двойная звезда", "ядро + α-частица" и пр. При кеплеровом движении в зависимости от начальных условий (начальной скорости) траекторией тела может быть эллипс, окружность, парабола, гипербола и прямая. Задача Кеплера рассматривается почти в любом курсе теоретической механики, однако решение ее оказывается громоздким и основано на использовании приемов, выходящих за рамки общего курса физики. Вместе с тем образовательный стандарт базового высшего технического образования по физике настойчиво рекомендует изучение задачи двух тел студентами не только технических, но и нетехнических (например, экономических) специальностей. Ниже рассматривается элементарное решение задачи Кеплера для случая $m \ll M$ (m, M — массы движущегося тела и тела-источника поля) и математическое моделирование движения тела в центральном силовом поле (частный случай задачи). Материал статьи может быть предложен студентам в качестве домашнего расчетного задания.

Итак, формулируем задачу:

Тело массы m движется в центральном силовом поле[1]. Сила обратно пропорциональна квадрату расстояния тела от некоторой точки О, называемой центром поля. Запишите уравнение траектории тела в полярных координатах r (φ), если при φ = 0 скорость равна V_0 и вектор $\vec{V}_0$ перпендикулярен радиус-вектору $\vec{r}_0$.

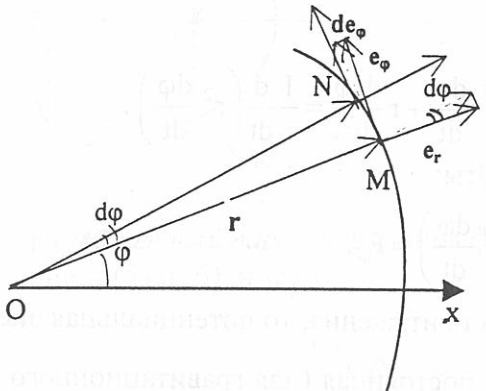

Рис.1

Свяжем систему отсчета с телом - источником поля. Точку О, в которой находится источник поля, будем считать *полюсом* полярной системы координат (рис.1). Проведем *полярную ось* Ох. Тогда положение тела М на траектории можно задать двумя числами: положительным числом r, равным длине отрезка ОМ (*полярный радиус*), и числом φ, равным углу Мох (*полярный угол*). Числа r и φ называются *полярными координатами* точки М.

При перемещении тела по траектории из точки М в соседнюю точку N, находящуюся на дифференциально малом расстоянии от точки М, орты $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ (единичные векторы, направленные в сторону возрастания соответствующей координаты) поворачиваются на угол dφ, как и радиус-вектор $\vec{r}$. Из рис.1 следует, что $d\varphi = \dfrac{de_r}{e_r}$; $d\vec{e}_r = d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$. $d\varphi = \dfrac{de_\varphi}{e_\varphi}$; $d\vec{e}_\varphi = -d\varphi \cdot \vec{e}_r$. Разделив на dt (время перемещения из М в N), получим $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$; $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{e}_r$. (1)

Так как $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$, то взяв первую и вторую производную по времени и учитывая (1), найдем скорость и ускорение тела.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi .$$

Проекция вектора $\vec{V}$ на орты: $V_r = \dfrac{dr}{dt}$; $V_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt}$.

Модуль вектора $\vec{V}$: $V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2}$.

---

[1] Сила называется *центральной*, если линия действия ее проходит через одну точку (центр поля) и зависит только от расстояния тела до этой точки. Примеры центральных сил: гравитационная сила, электростатическая (кулоновская сила) и др.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi+r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}=$$

$$=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r+\left(2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Проекции вектора $\vec{a}$ на орты:

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \qquad a_\varphi=2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Второй закон Ньютона в проекциях на орты:

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=F_r; \qquad m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=F_\varphi. \tag{2}$$

Если на тело действует центральная сила притяжения, то потенциальная энергия может быть выражена $U=-\frac{\alpha}{r}$, где α - постоянная (для гравитационного поля $\alpha=\gamma mM$). Полная механическая энергия тела сохраняется и равна сумме кинетической и потенциальной:

$$E=T+U=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-\frac{\alpha}{r}. \tag{3}$$

Момент импульса тела относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости движения также сохраняется:

$$L=mV_\varphi r=mr^2\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

E и L можно найти из начальных условий:

$$E=\frac{mV_0^2}{2}-\frac{\alpha}{r_0}; \qquad L=mV_0r_0.$$

Исключим время из уравнений (3) и (4). Для этого выразим из (4) dt и подставим в (3). Разделяем переменные и интегрируем полученное выражение с учетом граничных условий. В результате получим уравнение траектории тела в полярных координатах. Для гравитационного поля $\alpha=\gamma mM$, и уравнение имеет вид:

$$r(\varphi)=\frac{\dfrac{r_0^2V_0^2}{\gamma M}}{1+\left(\dfrac{r_0V_0^2}{\gamma M}-1\right)\cos\varphi}. \tag{5}$$

Отсюда делаем вывод, что траекторией тела будет кривая второго порядка. Обратите внимание, что масса тела m сократилась!

Кривая второго порядка – это геометрическое место точек, для которых отношение расстояний их до заданной точки (*фокуса*) и до заданной прямой (*директрисы*) постоянно (рис.2).

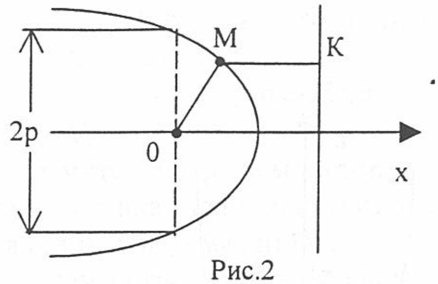

Рис.2

Это отношение $\varepsilon = \dfrac{MO}{MK}$ называется *эксцентриситетом*. При $\varepsilon < 1$ имеем эллипс (частный случай эллипса – окружность, для окружности $\varepsilon = 0$), при $\varepsilon = 1$ – параболу, $\varepsilon > 1$ – гиперболу.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad (6)$$

где p - *фокальный параметр* (длина фокальной полухорды).

Сравнивая (5) и (6), имеем

$$p = \frac{r_0^2 V_0^2}{\gamma M}; \quad \varepsilon = \left(\frac{r_0 V_0^2}{\gamma M} - 1\right). \qquad (7)$$

Зависимости $p = f(V_0)$ и $\varepsilon = f(V_0)$ показаны на рис.3.

Исследуем выражения (7).

1. $\varepsilon < 1$; $V_0 < V_{02} = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}}$; траектория – эллипс, $0 < V_0 < V_{01}$ - центр поля совпадает с задним фокусом, $V_{01} < V_0 < V_{02}$ - центр поля совпадает с передним фокусом.
2. $\varepsilon = 1$; $V_0 = V_{02} = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}}$; эллипс вырождается в параболу, при $\varphi = \pi$

$$r(\varphi) = r(\pi) = \infty .$$

3. $\varepsilon > 1$; $V_0 > V_{02} = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}}$; траектория – гипербола.

Для тела, движущегося в поле тяготения планеты, если $r_0 \approx R$ - радиус планеты, то V_{01} и V_{02} - первая и вторая космические скорости. В общем случае их называют *круговой* и *параболической* скоростями:

$$V_{01} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}; \qquad V_{02} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} \approx 1{,}41 V_{01}. \qquad (8)$$

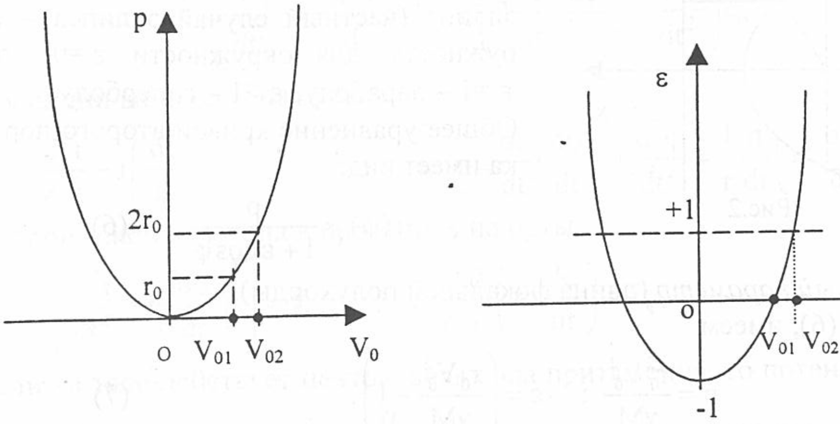

Рис. 3

О третьей космической скорости

Третья космическая скорость V_{03} — это наименьшая скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно вышло за пределы Солнечной системы. Планету, с которой стартует тело, можно рассматривать как спутник Солнца, а скорость планеты на орбите $V_{пл}$ как первую космическую скорость по отношению к Солнцу. Тогда вторая космическая скорость по отношению к Солнцу будет равна $V_{пл}\sqrt{2}$. Здесь предполагается запуск тела с поверхности Солнца. Если же тело запускается с планеты *в направлении ее движения по орбите*, то ему достаточно сообщить меньшую скорость

$$V = V_{пл}\sqrt{2} - V_{пл} \approx 0{,}4V_{пл}.$$

Кроме того, тело должно преодолеть притяжение самой планеты. Для этого ему нужно дополнительно сообщить вторую космическую скорость *по отношению к данной планете*. Полная кинетическая энергия тела, покидающего Солнечную систему, равна $\frac{mV_{03}^2}{2} = \frac{mV_{02}^2}{2} + \frac{mV^2}{2}$.

Отсюда $$V_{03} = (V_{02}^2 + 0{,}16V_{пл}^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

Скорость $V_{пл}$ легко определить, зная массу Солнца и средний радиус орбиты $r_{ср}$ (большую полуось орбиты).

Задание 1

1. Постройте график $\varepsilon = f(V_0)$ по формуле (7) и рассчитайте V_{01} и V_{02} по формуле (8) для своего варианта.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_0	R	2R	3R	4R	5R	6R	7R	8R	9R
V_{01}									
V_{02}									

Радиус R Земли и массу M Земли возьмите из таблицы. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2/кг^2$.

2. Составьте программу для расчета траектории искусственного спутника в поле тяготения Земли по формуле (5). Угол φ изменяется от 0 до 2π.
3. Выберите 5 значений начальной скорости для своего варианта в интервалах:

$0 < V_0 < V_{01}$;

$V_0 = V_{01}$ (круговая скорость)

$V_{01} < V_0 < V_{02}$;

$V_0 = V_{02}$ (параболическая скорость);

$V_{02} < V_0$.

4. Получите на экране монитора (или постройте на миллиметровке) траекторию тела (спутника) для каждого из 5 случаев. Изобразите 5 кривых на одном чертеже в одинаковом масштабе.
5. Прокомментируйте полученный результат.

Задание 2.

Рассчитайте по формулам (8) и (9) первую, вторую и третью космические скорости для планет Солнечной системы (см. таблицу).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Планета	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон

Таблица. Некоторые физические характеристики планет Солнечной системы и Солнца

Планета	Экват. радиус R, км	Масса M	Среднее расст. от Солнца $r_{ср}$, млн. км
Меркурий	2440	$3{,}17 \cdot 10^{23}$	57,91
Венера	6052	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	108,21
Земля	$6{,}371 \cdot 10^{3}$	$5{,}977 \cdot 10^{24}$	149,60
Марс	3394	$6{,}39 \cdot 10^{23}$	227,9
Юпитер	71400	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	778,3
Сатурн	60000	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	1428
Уран	25400	$8{,}70 \cdot 10^{25}$	2872
Нептун	22300	$1{,}03 \cdot 10^{26}$	4498
Плутон	1500	$1{,}0 \cdot 10^{22}$	5910
Солнце	$6{,}96 \cdot 10^{5}$	$19{,}84 \cdot 10^{29}$	—

Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача Кеплера ? Приведите примеры, показывающие актуальность этой задачи.
2. Как объяснить сохранение механической энергии и момента импульса при движении тела в центральном силовом поле ?

3. Запишите общее уравнение кривой второго порядка в полярных координатах. Что называется *эксцентриситетом* ?
4. Дайте определение первой, второй и третьей космической скорости.
5. Как изменяется вид траектории при изменении начальных условий ?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.** Механика (Берклеевский курс физики), М., Наука, 1975, с.298— 311.
2. **Хайкин С.Э.** Физические основы механики, М., Наука, 1971 (и более поздние издания).

А.Н.ВЕРХОЗИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Закон возрастания энтропии при неравновесном теплообмене в изолированной системе (второе начало термодинамики) утверждает, что если такая система состоит из двух областей, где температуры различны, то неравновесный теплообмен приводит к выравниванию температур и росту энтропии. При достижении равновесия энтропия системы достигает максимума.

Результат любого другого неравновесного взаимодействия в изолированной системе, например, выравнивание давлений, обязательно сопровождается неравновесным теплообменом, а следовательно, также ростом энтропии.

Уточним смысл некоторых встречающихся ниже понятий. *Макросостояние* — это состояние системы, характеризуемое набором макроскопических параметров, относящихся к системе в целом (давление, объем, температура и др.). *Микросостояние* — это состояние системы, характеризуемое набором параметров каждой частицы (координата, энергия, импульс).
Одно и то же макросостояние может быть реализовано множеством микросостояний. Число микросостояний, соответствующее данному макросостоянию, называется *термодинамической вероятностью* W.
Энтропия системы S (функция состояния системы, тепловая координата) связана *с термодинамической вероятностью* W соотношением Больцмана:

$$S = k \ln W, \qquad (1)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Сочетаниями из m элементов по n называются соединения, которые можно образовать из этих m элементов, собирая в каждое n элементов так, чтобы соединения отличались друг от друга только самими элементами. Различие порядка их расположения не имеет значения. Число сочетаний рассчитывается по формуле:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{n!} . \qquad (2)$$