

ТРАНСПОРТНЫЕ СРЕДСТВА

УДК 629.016

А. Ю. Преснов

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДА ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩЕЙСЯ ОТДЕЛЬНОЙ НЕРОВНОСТИ ДОРОГИ

Приводятся результаты моделирования отдельной неровности дороги с помощью ряда Фурье.

Ключевые слова: неровность дороги, ряд Фурье.

Данная работа актуальна в связи с тем, что немаловажную роль в процессе исследования движения автомобиля по дорогам играет периодически повторяющаяся отдельная неровность, в виде короткого всплеска некоторой высоты. Так как дороги зачастую имеют много неровностей такого типа, которые обусловлены периодически повторяющимися дефектами дорожного полотна и наличием периодически повторяющихся посторонних предметов в виде щебня и камней.

На рис. 1 показана отдельная периодическая повторяющаяся через промежуток времени — Δt неровность дороги с высотой — h и шириной — b .

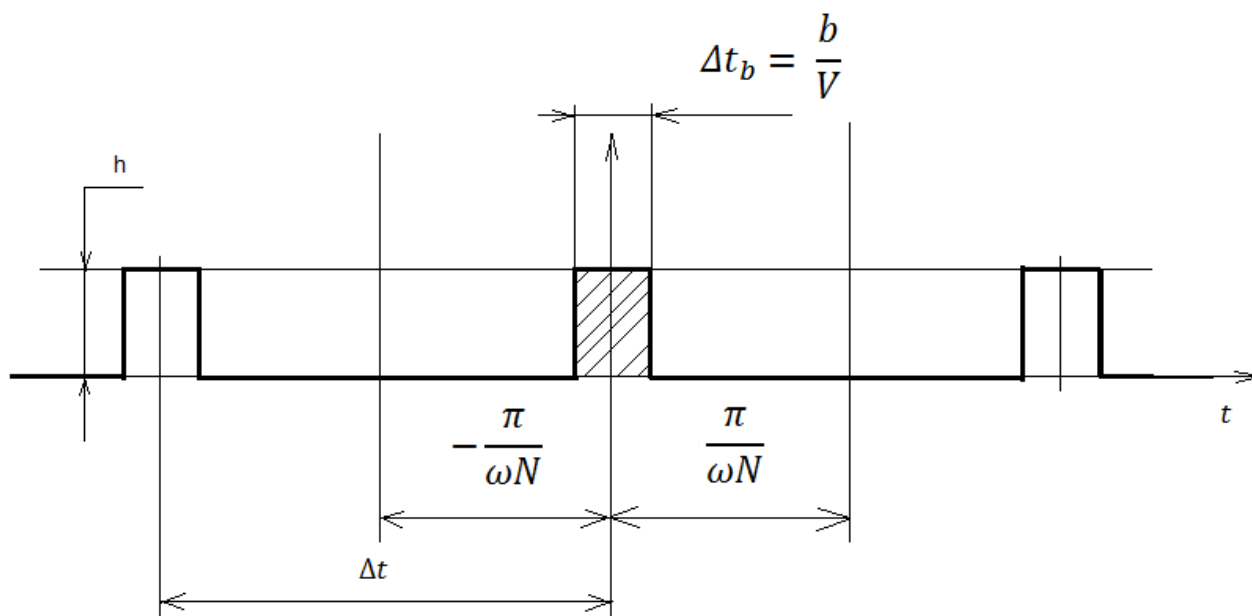


Рис. 1. Отдельная периодически повторяющаяся неровность дороги

Заменим движение автомобиля по неровной дороге с периодически повторяющейся неровностью движением по вращающемуся барабану с эквивалентными установленными на нём неровностями.

На рис. 2 показан вращающийся барабан с отдельными неровностями высотой — h и шириной — b .

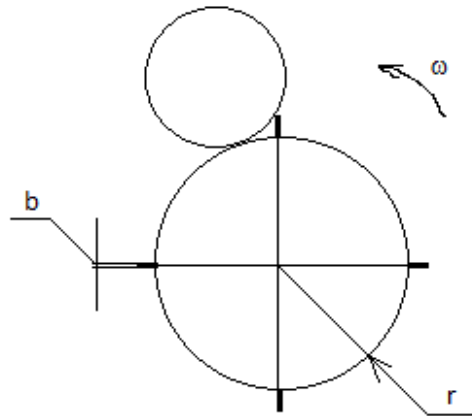


Рис. 2. Вращающийся барабан с неровностями

Так как скорость движения автомобиля V , то угловая скорость барабана:

$$\omega = \frac{V}{r}. \quad (1)$$

При повороте колеса на один оборот затрачивается время T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2)$$

За время соответствующее одному обороту колеса оно преодолевает N выступов. Время, затрачиваемое на преодоление одного выступа длиной — b

$$\Delta t_b = \frac{b}{V}. \quad (3)$$

Таким образом, функция, описывающая изменение профиля неровной дороги под колесом автомобиля является периодической, а её период

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{\omega N};$$

$$f(t) = \begin{cases} 0; & -\frac{\pi}{\omega N} \leq t < -\frac{b}{2V}; \\ h; & -\frac{b}{2V} \leq t < \frac{b}{2V}; \end{cases} \text{ или } f(t) = \begin{cases} 0; & -\frac{\pi r}{VN} \leq t < -\frac{b}{2V}; \\ h; & -\frac{b}{2V} \leq t < \frac{b}{2V}; \\ 0; & \frac{b}{2V} \leq t < \frac{\pi}{\omega N}; \end{cases} \quad (4)$$

Перенесём теорию рядов Фурье 2π — периодической функции на функцию с периодом $\frac{2\pi}{\omega N}$, $l > 0$, $l = \frac{\pi}{\omega N}$ [С. 364, 1].

Для этого достаточно линейно отобразить отрезок $[-l, l]$ на отрезок $[-\pi; \pi]$:

$$y = \frac{\pi}{l}t, -l \leq t \leq l; -\pi \leq y \leq \pi, \quad (5)$$

И тогда вопрос об определении ряда Фурье для $2l$ — периодической функции сведётся к вопросу о ряде Фурье 2π — периодической функции в следующем смысле. Если функция $f(t)$ имеет период $2l$ и абсолютно интегрируема на периоде, т. е. абсолютно интегрируема на отрезке $[-l, l]$, то после замены переменного

$$t = \frac{l}{\pi}y \quad (6)$$

обратной к отображению, получится 2π — периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция $f\left(\frac{l}{\pi}y\right)$.

$$t = \frac{l}{\pi}y; t = \frac{\pi}{\omega N \pi}y; t = \frac{y}{\omega N}; \quad (7)$$

$$f\left(\frac{l}{\pi}y\right) = \begin{cases} 0; & -\frac{\pi}{\omega N} \leq \frac{y}{\omega N} < -\frac{b}{2V}; \\ h; & -\frac{b}{2V} \leq \frac{y}{\omega N} < \frac{b}{2V}; \\ 0; & \frac{b}{2V} \leq \frac{y}{\omega N} < \frac{\pi}{\omega N}; \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0; & -\pi \leq y < -\frac{b}{2V}; \\ h; & -\frac{b\omega N}{2V} \leq y < \frac{b\omega N}{2V}; \\ 0; & \frac{b\omega N}{2V} \leq y < \pi; \end{cases} \quad (8)$$

Выполнив в её ряде Фурье замену переменного, т. е. вернувшись к исходной переменной, получим ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l}; \quad (9)$$

называемый рядом Фурье заданной $2l$ — периодической функции $f(x)$.

Формулы для коэффициентов ряда с помощью той же замены переменного следуют из формул для коэффициентов Фурье 2π — периодической функции:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, n = 1, 2, \dots \\ a_0 &= \frac{\omega N}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega N}}^{\frac{\pi}{\omega N}} f(t) dt = \frac{VN}{2\pi r} \frac{b}{V} = \frac{Nb}{2\pi r}; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt = \frac{2h}{n\pi} \sin \frac{nbN}{2r} \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt = \frac{\omega Nh}{\pi} \left[\int_{-\frac{b}{2V}}^{\frac{b}{2V}} \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Объект научных исследований данной работы — влияние числа гармоник ряда Фурье — функции, математически представляющей неровность на точность её представления, и оценка погрешности её представления от числа гармоник.

Для исследования была составлена при помощи встроенного в Excel языка программирования VisualBasic программа вычисления значения функции — ряда Фурье текст которой приведён в листинге:

```
Sub Рассчитать_ряд_Фурье()  
Ret считываем данные  
V_km_per_h = Range("A8").Value  
V_m_per_s = V_km_per_h * (1000 / 3600)  
Range("B8").Value = V_m_per_s  
N = Range("C8").Value  
b = Range("D8").Value  
h = Range("E8").Value  
r = Range("F8").Value  
dt_b = b / V_m_per_s  
Range("G8").Value = dt_b  
l = (WorksheetFunction.Pi * r) / (V_m_per_s * N)  
Np = Range("J8").Value  
dt = (2 * l) / (Np / 7)  
n_g = Range("M6").Value  
Ret Очищаем от предыдущего расчёта  
t_save = Range("K1:K7")  
Range("K:K").Clear  
Range("K1:K7") = t_save  
Ret Очищаем от предыдущего расчёта  
L_save = Range("L1:L7")  
Range("L:L").Clear  
Range("L1:L7") = L_save  
Range("K8").Value = -l  
t = Range("K8").Value2  
a0 = (h * N * b) / (2 * WorksheetFunction.Pi * r)  
f_n = a0  
For nn = 1 To n_g  
    ann = ((2 * h) / (nn * WorksheetFunction.Pi)) * Sin((nn * b * N) / (2 * r))  
    f_n = f_n + ann * Cos((nn * WorksheetFunction.Pi * t) / l)  
Next nn
```

```

Range("L8").Value = f_n
Rem Проводимрасчёт
For i = 1 To Np
    Cells(8 + i, 11).Value = Cells(7 + i, 11).Value + dt
    t = Cells(8 + i, 11).Value
    f_n = a0
    For nn = 1 To n_g
        ann = ((2 * h) / (nn * WorksheetFunction.Pi)) * Sin((nn * b * N) / (2 * r))
        f_n = f_n + ann * Cos((nn * WorksheetFunction.Pi * t) / l)
    Next nn
    Cells(8 + i, 12).Value = f_n
Next i
Rem Строим график
ActiveSheet.ChartObjects(ActiveSheet.ChartObjects.Count).Activate
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmooth
ActiveChart.SeriesCollection(1).XValues = "=Лист1!$K$8:$K$" + CStr(Np)
ActiveChart.SeriesCollection(1).Values = "=Лист1!$L$8:$L$" + CStr(Np)
End Sub

```

С помощью данной программы было произведено моделирование неровностей. Исходные данные указаны в табл 1.

Таблица 1

Исходные данные

V, км/ч	V, м/с	N, шт.	b, м	h, м	r, м
60	16,66667	20	0,005	0,018	0,6

В результате которого были получены расчёты рядов Фурье в выбранных точках и построены графические зависимости отображающие результаты расчётов при различном числе гармоник (рис. 3–7).

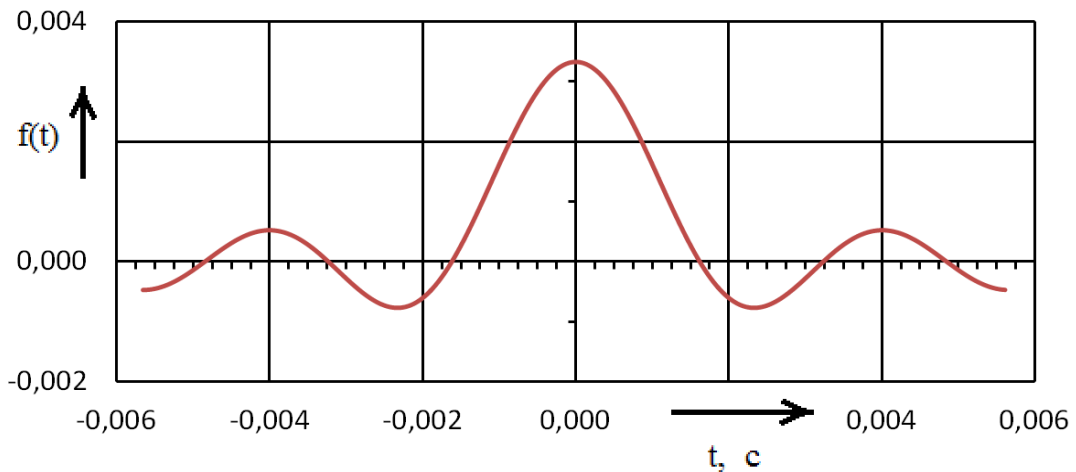


Рис. 3. Графическая зависимость профиля дороги при периодически повторяющейся отдельной неровности дороги (числогармоник $n = 3$)

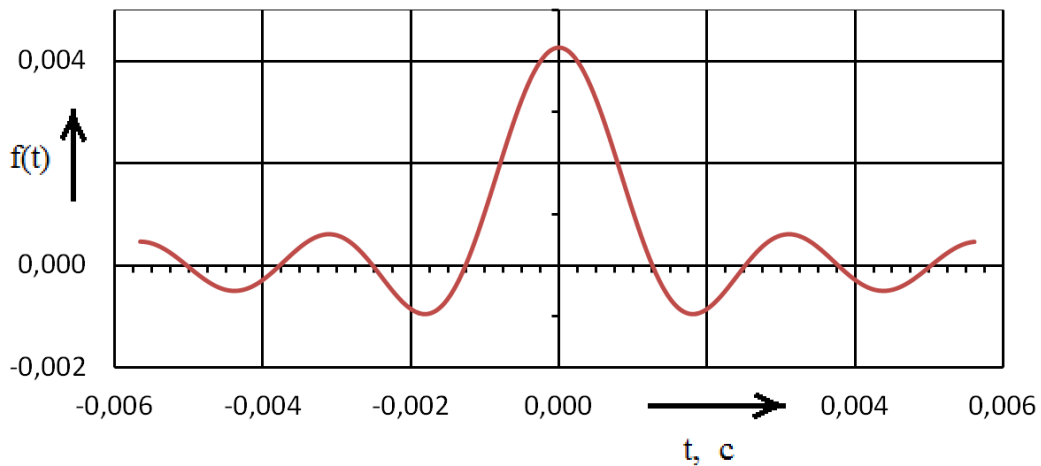


Рис. 4. Графическая зависимость профиля дороги при периодически повторяющейся отдельной неровности дороги (число гармоник $n = 4$)

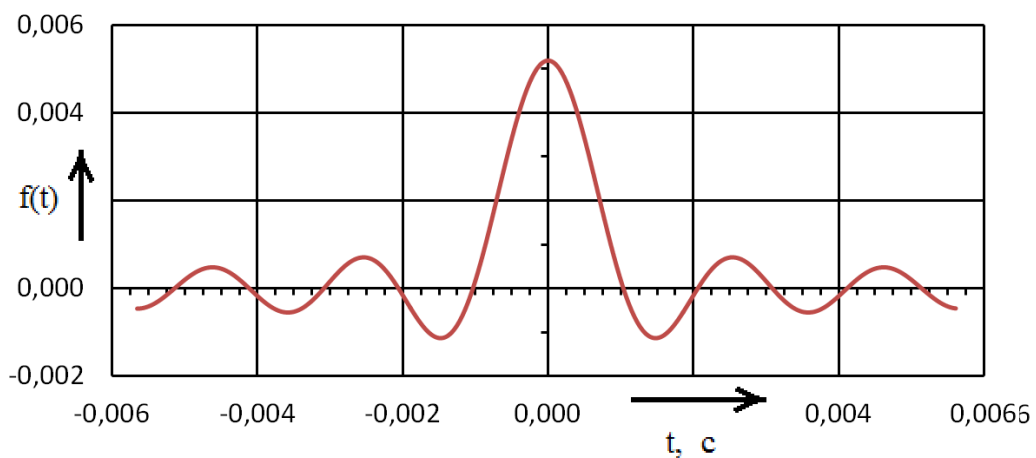


Рис. 5. Графическая зависимость профиля дороги при периодически повторяющейся отдельной неровности дороги (число гармоник $n = 5$)

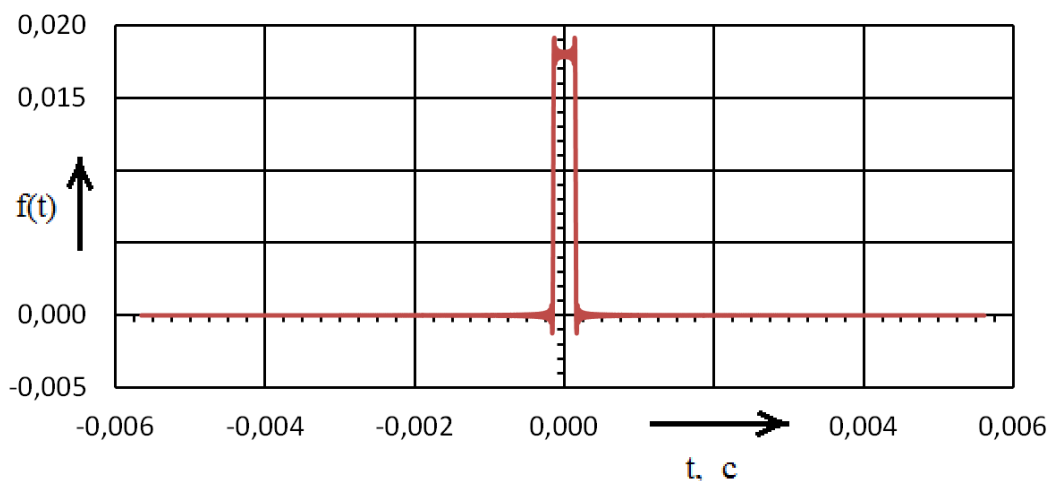


Рис. 6. Графическая зависимость профиля дороги при периодически повторяющейся отдельной неровности дороги (число гармоник $n = 500$)

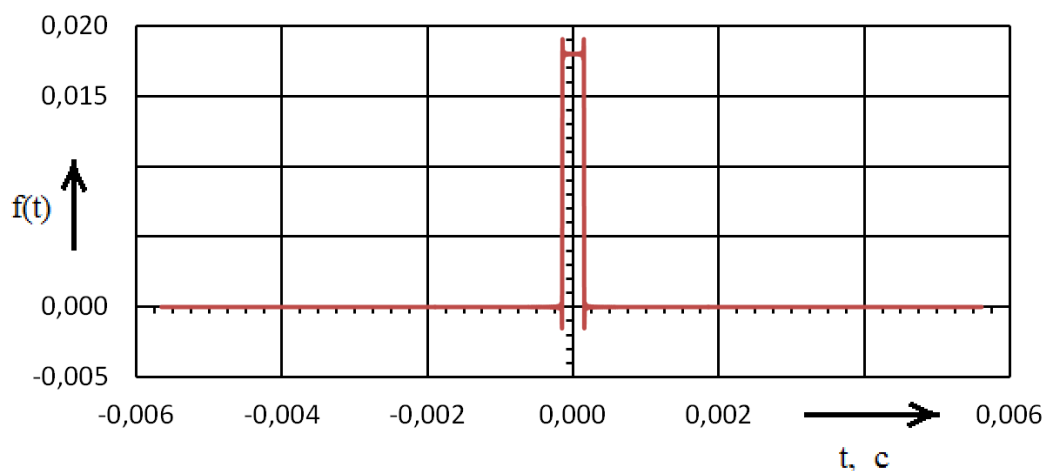


Рис. 7. Графическая зависимость профиля дороги при периодически повторяющейся отдельной неровности дороги (число гармоник $n = 2500$)

Зависимость приобретает ступенчатый вид только при достаточно больших n , поэтому для точности расчётов важно использовать максимум гармоник, хотя их бесконечно много.

Для того, чтобы проследить как влияет число гармоник на точность представления была построена графическая зависимость

Таким образом, использование рядов Фурье позволяет аналитически описать профиль неровной дороги с отдельной периодически повторяющейся неровностью. Это важно для расчёта колебаний автомобиля по одномерной схеме в виде груза, установленного на пружине, или в более сложных двухмерных схемах.

Литература

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 424 с.

Об авторе

Преснов Александр Юрьевич — инженер кафедры «Автомобили и автомобильное хозяйство» ФГБОУ ВПО ПсковГУ, аспирант.

A. Y. Presnov

**MODELING REPEATED PERIODICALLY SINGLE ROUGH ROAD
THROUGH FOURIER SERIES**

Happens to result of the modeling separate unevenness of road with Fourier series.

Keywords: unevenness of road, Fourier series.