УДК 514.742.43

И. П. Попов

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ГРАДИЕНТ, ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР

Вводится понятие о слагаемых векторных произведений, которыми являются первая, или ортоположительная часть и вторая, или ортоотрицательная часть; дальнейшим развитием этого понятия является представление о сопряженных векторах, векторном дифференциальном поверхностном операторе, поверхностном градиенте, производной по поверхности, поверхностных дивергенции и роторе. Рассматриваются поверхностные функции, их поверхностное дифференцирование и интегрирование. Показаны особенности поверхностных функций, для которых все слагаемые являются функциями не менее чем двух переменных, кроме того, поверхностные функции имеют смешанные частные производные второго порядка, при этом, по крайней мере, одна из смешанных частных производных второго порядка от любого слагаемого не обращается в нуль. Доказывается теорема о восстановлении поверхностной функции по ее поверхностному градиенту. Вводится понятие о линейной комбинации координат и ее делении на вектор, нулевом и мнимом нулевом векторных операторах, псевдовекторах и комбинированных векторах. Приведен ряд разложений с использованием введенных операций.

Ключевые слова: *вектор, оператор, поверхностный, координаты.*

Введение

Работа посвящена рассмотрению ряда операций на пространстве гладких функций и векторных полей в $\mathbf{R}^3$. В качестве исходного пункта могут выступать нулевые величины. Их можно условно разделить на две категории. К первой категории относятся величины, содержимое которых «пусто». Ко второй — состоящие из величин, сумма которых равна нулю. К последней категории относится векторное произведение оператора Гамильтона (набла) на самого себя. При этом использование взаимно противоположных компонентов этого произведения создает определенные перспективы, в частности, развития элементов *поверхностного векторного анализа*. К таким элементам могут быть отнесены векторный дифференциальный поверхностный оператор, поверхностный градиент, производная по произвольной поверхности, поверхностные дивергенция и ротор, являющиеся аналогами соответствующих величин первого порядка [1, 2]. Названные операции относятся к поверхностному дифференцированию, которое можно рассматривать в качестве обратной задачи к поверхностному интегрированию. Перечисленные операции могут использоваться для получения разложений ряда векторных представлений второго порядка, часть которых имеет аналоги первого порядка. В ряде случаев для этого придется прибегнуть к специальным методам, таким, как сопряжение векторов, использование линейной комбинации координат, ее деление на вектор, введение нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов.

§1. Слагаемые векторных произведений

Для векторов **G** и **H** имеет место операция векторного произведения

$$\mathbf{G}\times\mathbf{H}=\left(G_yH_z-G_zH_y\right)\mathbf{i}+\left(G_zH_x-G_xH_z\right)\mathbf{j}+\left(G_xH_y-G_yH_x\right)\mathbf{k}.$$

Его можно представить в виде:

$$\mathbf{G}\times\mathbf{H}=\left(G_yH_z\mathbf{i}+G_zH_x\mathbf{j}+G_xH_y\mathbf{k}\right)-\left(G_zH_y\mathbf{i}+G_xH_z\mathbf{j}+G_yH_x\mathbf{k}\right).$$

Определение 1.1. Операция

$$\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{H}:=G_yH_z\mathbf{i}+G_zH_x\mathbf{j}+G_xH_y\mathbf{k}$$

является *первой, или ортоположительной частью векторного произведения* $\mathbf{G}\times\mathbf{H}$ векторных полей $\mathbf{G}=G_x\mathbf{i}+G_y\mathbf{j}+G_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}=H_x\mathbf{i}+H_y\mathbf{j}+H_z\mathbf{k}$.

Определение 1.2. Операция

$$\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}\mathbf{H}:=\mathbf{H}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G}=G_zH_y\mathbf{i}+G_xH_z\mathbf{j}+G_yH_x\mathbf{k}$$

является *второй, или ортоотрицательной частью векторного произведения*.

Очевидно, что

$$\mathbf{G}\times\mathbf{H}=\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{H}-\mathbf{H}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G}=\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{H}-\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}\mathbf{H}.$$

Все вышесказанное справедливо и для ротора.

Определение 1.3. Операция

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M}:=\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{M}=\frac{\partial M_z}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial M_x}{\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial M_y}{\partial x}\mathbf{k}$$

является *первой, или ортоположительной частью ротора* $\mathrm{rot}\mathbf{M}$ *векторного поля* $\mathbf{M}=M_x\mathbf{i}+M_y\mathbf{j}+M_z\mathbf{k}$.

Определение 1.4. Операция

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M}:=\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{M}=\frac{\partial M_y}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial M_z}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\mathbf{k}$$

является *второй, или ортоотрицательной частью ротора* $\mathrm{rot}\mathbf{M}$.

Очевидно, что

$$\mathrm{rot}\mathbf{M}=\mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M}-\mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M}\ \text{ или }\ \nabla\times\mathbf{M}=\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{M}-\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{M}.$$

§2. Сопряженные векторы

Определение 2.1. Операция

$$\mathbf{G}\times^{*}\mathbf{H}:=\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{H}+\mathbf{H}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G}=\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\mathbf{H}+\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}\mathbf{H}$$

является *сопряженным векторным произведением* векторных полей **G** и **H**.

Определение 2.2. Операция

$$\mathrm{rot}^{*}\mathbf{M}:=\mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M}+\mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M}\ \text{ или }\ \nabla\times^{*}\mathbf{M}=\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{M}+\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{M}$$

является *сопряженным ротором векторного поля* **M**.

Определение 2.3. Оператор

$$\nabla_S:=\nabla\times_{\mathrm{I}}\nabla=\nabla\times_{\mathrm{II}}\nabla=\frac{\nabla\times^{*}\nabla}{2}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}$$

является векторным дифференциальным поверхностным оператором.

§3. Поверхностный градиент и производная по поверхности

Определение 3.1. Вектор

$$\operatorname{grad}_S W := \nabla_S W = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\,\mathbf{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\mathbf{k} \tag{3.1}$$

является поверхностным градиентом функции W.

По аналогии с производной по направлению вычисляется *производная по поверхности*

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} := \left(\operatorname{grad}_S W\right)\cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\cos\varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\cos\psi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\cos\theta\,. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\psi + \mathbf{k}\cos\theta$ — поле единичных нормалей поверхности дифференцирования.

Теорема 3.1. *Производная функции $W(x, y, z)$ (скалярного поля) по некоторой поверхности равна проекции поверхностного градиента на единичный вектор нормали к этой поверхности (в соответствующей точке).*

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} = \left|\operatorname{grad}_S W\right| \cos\left(\operatorname{grad}_S W, \mathbf{n}\right).$$

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из (3.2).

Следствие. *Поверхностный градиент скалярного поля равен по величине производной поля по поверхности, для которой эта производная (в соответствующей точке) является максимальной, и совпадает по направлению с единичным вектором нормали к этой поверхности.*

$$\max\left(\frac{d_S^2 W}{d\sigma}\right) = \left|\operatorname{grad}_S W\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2}\,.$$

Пусть для функции $U(x,y,z)$, все слагаемые которой являются функциями не менее чем двух переменных, имеющей смешанные частные производные второго порядка, по крайней мере, одна из смешанных частных производных второго порядка от любого слагаемого не обращается в нуль. Для единообразия терминологии такая функция может быть названа *поверхностной*.

Теорема 3.2. *Поверхностная функция $U(x,y,z)$ может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту $\mathbf{G}$ в соответствии с формулой:*

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy - 2V =$$

$$= P_1(x, y, z) + P_2(y, z) + Q_1(x, y, z) + Q_2(x, z) + R_1(x, y, z) + R_2(x, y) - 2V\,.$$

При этом $V = P_1 = Q_1 = R_1$, а интегралы понимаются как повторные неопределенные с нулевыми аддитивными составляющими.

Доказательство

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial G_z}{\partial z}\,. \tag{3.3}$$

U можно искать в виде:

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy + f(x,y,z).$$

При этом

$$\iint G_x dydz = P_1(x,y,z) + P_2(y,z),$$

$$\iint G_y dxdz = Q_1(x,y,z) + Q_2(x,z),$$

$$\iint G_z dxdy = R_1(x,y,z) + R_2(x,y),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_x dydz = \frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_y dxdz = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial^3 Q_1}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_z dxdy = \frac{\partial G_z}{\partial z} = \frac{\partial^3 R_1}{\partial x \partial y \partial z}.$$

С учетом (3.3) $P_1 = Q_1 = R_1 = V(x,y,z)$. Тогда $f(x,y,z) = -2V$. При этом

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[\iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy + f(x,y,z)\right] =$$

$$G_x + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[Q_1 + Q_2(x,z) + R_1 + R_2(x,y) - 2V\right] = G_x.$$

Аналогично $\partial^2 U / (\partial x \partial z) = G_y$, $\partial^2 U / (\partial x \partial y) = G_z$. Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство нулю аддитивных составляющих повторных неопределенных интегралов вытекает из того, что в поверхностных функциях соответствующих слагаемых нет.

Замечание 2. Поверхностная функция может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту и с помощью поверхностного интеграла, однако это решение может оказаться более громоздким из-за необходимости определения поверхности интегрирования. Кроме того, при поверхностном интегрировании могут появляться константы и функции одной переменной, вследствие чего возникает необходимость прибегать к их отбрасыванию, т. е. к произволу.

Пример. $\operatorname{grad}_S U = \left(3z^2 - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{i} + \left[\frac{1}{y} - \sin(x+z)\right]\mathbf{j} + \left(2y - \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{k}$,

$$U = yz^3 + \frac{xz}{y} + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2 + \frac{xz}{y} - 2\frac{xz}{y} = yz^3 + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2.$$

§4. Поверхностная дивергенция и поверхностный ротор

В (3.1) имеет место произведение вектора ∇_S на скаляр W. Могут быть рассмотрены скалярное и векторное произведения ∇_S на вектор $\mathbf{M}$.

Определение 4.1. Операция

$$\operatorname{div}_S \mathbf{M} := \nabla_S \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial y}$$

является поверхностной дивергенцией векторного поля **M**.

Определение 4.2. Операция

$$\operatorname{rot}_S \mathbf{M} := \nabla_S \times \mathbf{M} = \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} \right)\mathbf{k}$$

является поверхностным ротором векторного поля **M**.

Определение 4.3. Операция

$$\operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z}\mathbf{k}$$

является *первой, или ортоположительной частью поверхностного ротора* $\operatorname{rot}_S \mathbf{M}$.

Определение 4.4. Операция

$$\operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z}\mathbf{k}$$

является *второй, или ортоотрицательной частью поверхностного ротора* $\operatorname{rot}_S \mathbf{M}$.

$$\operatorname{rot}_S \mathbf{M} = \operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} - \operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M}\text{, или } \nabla_S \times \mathbf{M} = \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} - \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M}.$$

Определение 4.5. Операция

$$\operatorname{rot}_S^* \mathbf{M} := \operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} + \operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M} \text{ или } \nabla_S \times^* \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} + \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M}$$

является *сопряженным поверхностным ротором векторного поля* **M**.

§5. Некоторые формулы

$$\nabla_S (\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_S V + \beta \nabla_S W \quad (\alpha = \mathrm{const},\ \beta = \mathrm{const}).$$

$$\nabla_S \cdot (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_S \cdot \mathbf{E} + \beta \nabla_S \cdot \mathbf{F}.$$

$$\nabla_S \times (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_S \times \mathbf{E} + \beta \nabla_S \times \mathbf{F}.$$

$$\Delta_S \equiv \nabla_S \cdot \nabla_S \equiv \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

$$\nabla \cdot \nabla_S \equiv \nabla_S \cdot \nabla \equiv 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}.$$

$$\nabla \times \nabla_S \equiv -\nabla_S \times \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\mathbf{k}.$$

$$\nabla \times_{\mathrm{I}} \nabla_S = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial x^2}\mathbf{k},$$

$$\nabla \times_{\mathrm{II}} \nabla_S = \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2}\mathbf{k}.$$

$$\Delta_S W \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) W(x,y,z) = \mathrm{div}_S \mathrm{grad}_S\, W = \nabla_S \cdot \nabla_S W\ .$$

$$\Delta_S \left(\alpha V + \beta W \right) = \alpha \Delta_S V + \beta \Delta_S W\ .$$

$$\Delta_S \mathbf{F} \equiv \Delta_S F_x \mathbf{i} + \Delta_S F_y \mathbf{j} + \Delta_S F_z \mathbf{k}\ .$$

$$\left(\nabla \cdot \nabla_S \right) W \equiv 3 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial z} = \nabla \cdot \nabla_S W = \mathrm{divgrad}_S\, W = \nabla_S \cdot \nabla W = \mathrm{div}_S \mathrm{grad}\, W\ .$$

$$\left(\nabla \cdot \nabla_S \right)\left(\alpha V + \beta W \right) = \alpha \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) V + \beta \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) W\ .$$

$$\left(\nabla \cdot \nabla_S \right)\left(VW \right) = \left[\left(\nabla \cdot \nabla_S \right) V \right] W + \nabla V \cdot \nabla_S W + \nabla W \cdot \nabla_S V + \left[\left(\nabla \cdot \nabla_S \right) W \right] V\ .$$

$$\left(\nabla \cdot \nabla_S \right) \mathbf{F} \equiv \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) F_x \mathbf{i} + \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) F_y \mathbf{j} + \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) F_z \mathbf{k}\ .$$

$$\left(\nabla \times \nabla_S \right) W \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} =$$

$$\nabla \times \nabla_S W \equiv \mathrm{rotgrad_S}\, W \equiv -\nabla_S \times \nabla W \equiv -\mathrm{rot}_S \mathrm{grad}\, W\ .$$

$$\left(\nabla \times \nabla_S \right) \cdot \mathbf{F} \equiv -\left(\nabla_S \times \nabla \right) \cdot \mathbf{F} \equiv$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \right) =$$

$$\mathrm{divrot}_S\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) = -\mathrm{div}_S \mathrm{rot}\, \mathbf{F} = -\nabla_S \cdot \left(\nabla \times \mathbf{F} \right).$$

$$\left(\nabla \times \nabla_S \right) \times \mathbf{F} \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} +$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{j} +$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k} \equiv$$

$$\nabla \times \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) - \nabla_S \times \left(\nabla \times \mathbf{F} \right) = \nabla_S \left(\nabla \cdot \mathbf{F} \right) - \nabla \left(\nabla_S \cdot \mathbf{F} \right).$$

$$\mathrm{graddiv}_S\, \mathbf{F} = \nabla \left(\nabla_S \cdot \mathbf{F} \right) = \nabla_S \times \left(\nabla \times \mathbf{F} \right) + \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{grad}_S \mathrm{div}\, \mathbf{F} = \nabla_S \left(\nabla \cdot \mathbf{F} \right) = \nabla \times \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) + \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{grad}_S \mathrm{div_S}\, \mathbf{F} = \nabla_S \left(\nabla_S \cdot \mathbf{F} \right) = \nabla_S \times \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) + \Delta_S \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{rotrot}_S\, \mathbf{F} = \nabla \times \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) = \nabla_S \left(\nabla \cdot \mathbf{F} \right) - \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{rot}_S \mathrm{rot}\, \mathbf{F} = \nabla_S \times \left(\nabla \times \mathbf{F} \right) = \nabla \left(\nabla_S \cdot \mathbf{F} \right) - \left(\nabla \cdot \nabla_S \right) \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{rot}_S \mathrm{rot}_S\, \mathbf{F} = \nabla_S \times \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) = \nabla_S \left(\nabla_S \cdot \mathbf{F} \right) - \Delta_S \mathbf{F}\ .$$

$$\mathrm{rot}_S \mathrm{grad}_S\, W = \nabla_S \times \nabla_S W \equiv 0\ .$$

$$\mathrm{div}_S \mathrm{rot}_S\, \mathbf{F} = \nabla_S \cdot \left(\nabla_S \times \mathbf{F} \right) \equiv 0\ .$$

$$\nabla_S\left(VW\right)=W\nabla_S V+V\nabla_S W+\nabla V\times^*\nabla W\ .$$

$$\nabla_S\cdot\left(W\mathbf{F}\right)=W\nabla_S\cdot\mathbf{F}+(\nabla_S W)\cdot\mathbf{F}+\nabla W\cdot(\nabla\times^*\mathbf{F})\ .$$

Известные методы не позволяют получить аналогичные формулы для выражений $\nabla_S\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)$, $\nabla_S\cdot\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)$, $(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)W\mathbf{F}$, $\nabla_S\times(W\mathbf{F})$, $\nabla_S\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$, $(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)\mathbf{F}$, $\Delta_S\left(VW\right)$. Для их получения, а также для решения других задач существующий арсенал средств операций с векторами может быть расширен за счет введения в рассмотрение линейной комбинации координат и ее деления на вектор, нулевого и мнимого нулевого векторных дифференциальных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов.

§6. Линейная комбинация координат

В результате операций над векторными функциями, например, скалярного произведения, взятия дивергенции и т. п. появляются скалярные функции вида

$$W_C=\left(W_x+W_y+W_z\right)_C . \tag{6.1}$$

Такая функция является *линейной комбинацией координат.* Ее особенностью является то, что подобные, входящие в состав слагаемых W_x, W_y, W_z, не приведены.

Пример 6.1.

$$W_C=\mathbf{F}\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}=(xy^2z\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}+y\mathbf{k})\,\tilde{\cdot}\,(z\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\left(xy^2z^2+xy^2z^2+yz\right)_C$$

— линейная комбинация координат, а $W=2xy^2z^2+yz$ — линейной комбинацией координат не является.

Здесь и далее волнистой чертой «~» помечена операция, результатом которой является сумма с неприведенными слагаемыми.

Может быть введена операция *деления линейной комбинации координат на вектор*.

$$\mathbf{F}=\frac{W_C}{\mathbf{G}}=W_C\cdot\mathbf{G}^{-1}=\frac{\left(W_x+W_y+W_z\right)_C}{G_x\mathbf{i}+G_y\mathbf{j}+G_z\mathbf{k}}=\frac{W_x}{G_x}\mathbf{i}+\frac{W_y}{G_y}\mathbf{j}+\frac{W_z}{G_z}\mathbf{k}\ . \tag{6.2}$$

Действительно,

$$F_xG_x=W_x,\quad F_yG_y=W_y,\quad F_zG_z=W_z,\quad F_x=\frac{W_x}{G_x},\quad F_y=\frac{W_y}{G_y},\quad F_z=\frac{W_z}{G_z},$$

$$\left(\frac{W_x}{G_x}\mathbf{i}+\frac{W_y}{G_y}\mathbf{j}+\frac{W_z}{G_z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(G_x\mathbf{i}+G_y\mathbf{j}+G_z\mathbf{k}\right)=W_C\ .$$

W_C, в отличие от W, содержит информацию, достаточную для восстановления одного из векторов-сомножителей при известном другом.

$$\frac{\mathbf{F}\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}}{\mathbf{G}}=\frac{\left(F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z\right)_C}{G_x\mathbf{i}+G_y\mathbf{j}+G_z\mathbf{k}}=\frac{F_xG_x}{G_x}\mathbf{i}+\frac{F_yG_y}{G_y}\mathbf{j}+\frac{F_zG_z}{G_z}\mathbf{k}=\mathbf{F}\ .$$

Пример 6.2. См. данные примера 6.1.

$$\mathbf{F}=\frac{\left(xy^2z^2+xy^2z^2+yz\right)_C}{z\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}}=\frac{xy^2z^2}{z}\mathbf{i}+\frac{xy^2z^2}{xy}\mathbf{j}+\frac{yz}{z}\mathbf{k}=xy^2z\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}\,.$$

Линейную комбинацию координат можно делить на любой вектор, а не только на один из сомножителей, которые ее образовали

$$\frac{\mathbf{F}\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}}{\mathbf{H}}=\frac{\left(F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z\right)_C}{H_x\mathbf{i}+H_y\mathbf{j}+H_z\mathbf{k}}=\frac{F_xG_x}{H_x}\mathbf{i}+\frac{F_yG_y}{H_y}\mathbf{j}+\frac{F_zG_z}{H_z}\mathbf{k}\,.$$

Пример 6.3.

$$\mathbf{F}=\frac{\left(xy^2z^2+xy^2z^2+yz\right)_C}{0{,}5x^2y^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+yz\mathbf{k}}=\frac{xy^2z^2}{0{,}5x^2y^2}\mathbf{i}+\frac{xy^2z^2}{yz}\mathbf{j}+\frac{yz}{yz}\mathbf{k}=\frac{2z^2}{x}\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}+\mathbf{k}\,.$$

Замечание. В общем виде линейная комбинация координат имеет вид

$$W_C^*=\left(\alpha W_x+\beta W_y+\gamma W_z\right)_C,$$

где α, β, γ — постоянные коэффициенты. Последнее выражение может быть получено из (6.1) следующим образом:

$$W_C^*=\frac{W_C}{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}\,\tilde{\cdot}\,\left(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}\right)=$$

$$\left(W_x\mathbf{i}+W_y\mathbf{j}+W_z\mathbf{k}\right)\tilde{\cdot}\left(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}\right)=\left(\alpha W_x+\beta W_y+\gamma W_z\right)_C.$$

§7. Нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются две линейные комбинации координат W_C и V_C. Найти формулы, связывающие W_C и V_C с выражениями $\left(W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z\right)_C$ и $\left(W_xV_y+W_yV_z+W_zV_x\right)_C$.

Для решения этих и подобных задач может быть введен нулевой векторный оператор

$$\nabla_0=\frac{\partial^0}{\partial x^0}\mathbf{i}+\frac{\partial^0}{\partial y^0}\mathbf{j}+\frac{\partial^0}{\partial z^0}\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\,.$$

Некоторые свойства.

$$\nabla_0U=U\mathbf{i}+U\mathbf{j}+U\mathbf{k}\,.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевого градиента* $\mathbf{G}_0$ функции U. $\mathbf{G}_0=\mathrm{grad}_0U=\nabla_0U$.

$$\nabla_0\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}=F_C=\left(F_x+F_y+F_z\right)_C.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевой дивергенции* векторного поля $\mathbf{F}$. $\mathrm{div}_0\mathbf{F}=\nabla_0\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}$.

$$\nabla_0\times\mathbf{F}=\left(F_z-F_y\right)\mathbf{i}+\left(F_x-F_z\right)\mathbf{j}+\left(F_y-F_x\right)\mathbf{k}\,.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевого ротора* векторного поля $\mathbf{F}$. $\mathrm{rot}_0\mathbf{F} = \nabla_0 \times \mathbf{F}$.

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{F}) = \mathrm{div}_0(\mathrm{rot}_0\,\mathbf{F}) \equiv 0 .$$

Из (6.2)

$$\frac{W_C}{\nabla_0} = \nabla_0^{-1} \cdot \left(W_x + W_y + W_z\right)_C = W_x\mathbf{i} + W_y\mathbf{j} + W_z\mathbf{k} = \mathbf{W} .$$

$$\nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C\right) = W_C ,$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \left(\nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \mathbf{F}\right) = \mathbf{F},$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \left(\nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \nabla_0\right) = \nabla_0 .$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla_S = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} ,$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \nabla_S) = \nabla_S .$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \nabla) = \nabla .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{k} ,$$

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \Delta \quad .$$

$$\nabla_0 \times \nabla_S = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{k} .$$

$$\nabla_0 \times \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{k} .$$

$$\nabla_0 \times (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathbf{k} .$$

$$\nabla_0 \times_{\mathrm{I}} \nabla_0 = \nabla_0 \times_{\mathrm{II}} \nabla_0 = \frac{\nabla_0 \times^* \nabla_0}{2} = \nabla_0 .$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$\left(W_xV_x + W_yV_y + W_zV_z\right)_C = \left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C\right) \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot V_C\right),$$

$$\left(W_xV_y + W_yV_z + W_zV_x\right)_C = \nabla_0 \mathbin{\overset{\sim}{\cdot}} \left[\left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C\right) \times_{\mathrm{I}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot V_C\right)\right].$$

Таким образом, применение нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи.

Представление полного дифференциала функции с помощью векторных операторов

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = (\nabla W)\cdot(\nabla_0^{-1}\cdot dS_1)\,.$$

Здесь dS_1 — полный дифференциал элементарной симметрической функции

$$S_1 \equiv x + y + z\,.$$

С помощью нулевого векторного оператора можно, например, преобразовать вектор в линейную комбинацию координат, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала линейную комбинацию координат преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в линейную комбинацию координат.

§8. Мнимый нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются линейная комбинация координат W_C и вектор $\mathbf{F}$. Найти формулу, связывающую W_C и $\mathbf{F}$ с выражением $F_xW_y\mathbf{i} + F_yW_z\mathbf{j} + F_zW_x\mathbf{k}$. Для решения подобных задач может быть введен мнимый нулевой векторный оператор

$$\{\nabla_0\} = \left\{\frac{\partial^0}{\partial x^0}\mathbf{i}\right\} + \left\{\frac{\partial^0}{\partial y^0}\mathbf{j}\right\} + \left\{\frac{\partial^0}{\partial z^0}\mathbf{k}\right\} = \{\mathbf{i}\} + \{\mathbf{j}\} + \{\mathbf{k}\}\,.$$

Его главное отличие от оператора ∇_0 заключается в том, что псевдоорты (мнимые орты) $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ не взаимодействуют, а взаимодействуют только с псевдоортами. Поэтому правила применения оператора $\{\nabla_0\}$ по отношению к векторам такие же, как и оператора ∇_0 в отношении линейных комбинаций координат.

Некоторые свойства $\{\nabla_0\}$.

$$\{\nabla_0\}U = U\{\mathbf{i}\} + U\{\mathbf{j}\} + U\{\mathbf{k}\}\,.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого градиента* $\{\mathbf{G}_0\}$ функции *U*. $\{\mathbf{G}_0\} = \{\mathrm{grad}_0 U\} = \{\nabla_0\}U$.

$$\frac{W_C}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(W_x + W_y + W_z\right)_C = W_x\{\mathbf{i}\} + W_y\{\mathbf{j}\} + W_z\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0\}\,\tilde{\cdot}\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot W_C\right) = W_C\,,$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\{\nabla_0\}\,\tilde{\cdot}\,\{\nabla_0\}\right) = \{\nabla_0\}\,.$$

$$\frac{\mathbf{F}}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}\{\mathbf{i}\} + F_y\mathbf{j}\{\mathbf{j}\} + F_z\mathbf{k}\{\mathbf{k}\}\,,$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{F}\right) = \mathbf{F}\,.$$

$$\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{F}\right) = \left(F_z\mathbf{k} - F_y\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\} + \left(F_x\mathbf{i} - F_z\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\} + \left(F_y\mathbf{j} - F_x\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S = \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}\{\mathbf{i}\} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}\{\mathbf{j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}\{\mathbf{k}\}\,,$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S\right)=\nabla_S\,.$$

$$\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\{\mathbf{i}\}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\{\mathbf{j}\}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\{\mathbf{k}\}\,,$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla\right)=\nabla\,.$$

$$\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla\right)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}-\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathbf{i}\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\mathbf{j}\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\mathbf{k}\}\,,$$

$$\{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta)=\Delta\,.$$

$$\{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta)=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0\}\times\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla_0^{-1}\cdot\Delta\right)\right]=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{k}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{i}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathbf{j}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}\,.$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left[\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot W_C\right)\right]=0\,,$$

$$\{\nabla_0\}\times_{\mathrm{I}}\{\nabla_0\}=\{\nabla_0\}\times_{\mathrm{II}}\{\nabla_0\}=\frac{\{\nabla_0\}\times^{*}\{\nabla_0\}}{2}=\{\nabla_0\}\,.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$F_xW_y\mathbf{i}+F_yW_z\mathbf{j}+F_zW_x\mathbf{k}=\{\nabla_0\}\cdot\left[\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{F}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\{\nabla_0^{-1}\}\,\tilde{\cdot}\,W_C\right)\right].$$

Таким образом, применение мнимого нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи. Другими словами, применение $\{\nabla_0\}$ позволяет сохранить орты исходного вектора.

§9. Псевдовекторы и комбинированные векторы

Применение мнимого векторного оператора приводит к появлению псевдовекторов. В частности, $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ являются псевдоортами.

Определение 9.1. *Псевдовектор* — это скаляр, в котором содержится информация о *включенном* в него векторе.

Псевдовектор может быть обозначен следующим образом:

$$A^{\{\mathbf{P}\}}=A\left\{\frac{\mathbf{P}}{P}\right\}=\frac{A}{P}\left\{P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}\right\}.$$

Из представленных выше выражений значительная часть является *комбинированными векторами*, т. е. сочетаниями векторов и псевдовекторов.

Комбинированный вектор может быть обозначен следующим образом:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{F}}^{\{\mathbf{P}\}} = B\left\{\frac{\mathbf{P}}{P}\right\}\frac{\mathbf{F}}{F}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс — информацию о направлении псевдовектора.

При выполнении операций с комбинированными векторами орты взаимодействуют с ортами, а псевдоорты — с псевдоортами. Орты и псевдоорты между собой не взаимодействуют.

При умножении комбинированного вектора на другой комбинированный вектор могут использоваться следующие четыре формы записи операций умножения:

$$«\{\cdot\}\cdot», «\{\cdot\}\times», «\{\times\}\cdot», «\{\times\}\times».$$

Действие знака произведения, расположенного в скобках, распространяется на псевдовекторные составляющие комбинированных векторов, а расположенного за скобками — на векторные.

Пример.

$$\left(W_x\{\mathbf{i}\}\mathbf{j} + W_y\{\mathbf{j}\}\mathbf{k} + W_z\{\mathbf{k}\}\mathbf{i}\right)\{\cdot\}\times\left(V_x\{\mathbf{i}\}\mathbf{k} + V_y\{\mathbf{j}\}\mathbf{i} + V_z\{\mathbf{k}\}\mathbf{j}\right) = W_xV_x\mathbf{i} + W_yV_y\mathbf{j} + W_zV_z\mathbf{k}\ .$$

При перемножении псевдовектора и комбинированного вектора нет необходимости размещения знака произведения в скобки. Очевидно, что знак произведения «·» или «×» в этом случае распространяется на псевдовекторные составляющие.

Величина

$$\operatorname{div}_0\{\mathbf{F}\} = \{\nabla_0\}\,\tilde{\cdot}\,\{\mathbf{F}\} = \left(F_x + F_y + F_z\right)_C,$$

может рассматриваться в качестве *мнимой нулевой дивергенции* мнимого векторного поля $\{\mathbf{F}\}$. Она совпадает с *нулевой дивергенцией* векторного поля $\mathbf{F}$.

Величина

$$\operatorname{rot}_0\{\mathbf{F}\} = \{\nabla_0\}\times\{\mathbf{F}\} = \left(F_z - F_y\right)\{\mathbf{i}\} + \left(F_x - F_z\right)\{\mathbf{j}\} + \left(F_y - F_x\right)\{\mathbf{k}\},$$

может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого ротора* мнимого векторного поля $\{\mathbf{F}\}$.

$$\{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0\}\times\{\mathbf{F}\}) = \operatorname{div}_0\{(\operatorname{rot}_0\{\mathbf{F}\})\} \equiv 0.$$

С помощью мнимого нулевого векторного оператора можно преобразовать вектор в комбинированный вектор, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала комбинированный вектор преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в комбинированный вектор.

§10. Некоторые формулы (продолжение)

$$\nabla_S\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right) = \nabla_0^{-1}\cdot\left\{\left[\nabla_0^{-1}\cdot\left(\nabla_S\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}\right)\right]\tilde{\cdot}\,\mathbf{G} + \left[\nabla_0^{-1}\cdot\left(\nabla_S\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}\right)\right]\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}\right\} +$$

$$\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla_S\times\mathbf{F}\right) + \mathbf{F}\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla_S\times\mathbf{G}\right) + \left(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{F}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{G}\right) + \left(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{F}\right) +$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left\{\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}\right)\right]\times_{\mathrm{I}}\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{G}\right)\right] + \left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}\right)\right]\times_{\mathrm{I}}\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\right]\right\}.$$

$$\nabla_S \cdot \left(\mathbf{F} \times \mathbf{G}\right) = \mathbf{G} \cdot (\nabla_S \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla_S \times \mathbf{G}) - (\nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{G}) +$$

$$(\nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{G}) + \nabla_0 \cdot \left\{\left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F})\right] \times \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{G})\right]\right\}.$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla_S) W\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \nabla_S W) + W(\mathbf{G} \cdot \nabla_S)\mathbf{F} +$$

$$\left\{\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W)\right]\right\} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F})\right] + \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W)\right] \times_{\mathrm{II}} (\nabla \times \mathbf{F}).$$

При этом

$$\left\{\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W)\right]\right\} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F})\right] = \nabla_0^{-1} \cdot \left\{\left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W)\right] \tilde{\cdot} \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F})\right]\right\}.$$

$$\left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W)\right] \times_{\mathrm{II}} (\nabla \times \mathbf{F}) = \left[\mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} (\nabla W)\right] \times_{\mathrm{II}} (\nabla \times \mathbf{F}) + \left[\mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} (\nabla W)\right] \times_{\mathrm{II}} (\nabla \times \mathbf{F}).$$

$$\nabla_S \times (W\mathbf{F}) = \nabla_S W \times \mathbf{F} + W\nabla_S \times \mathbf{F} + \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla W\right)\right] \cdot \left\{\{\nabla_0\} \times \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F}\right)\right]\right\} +$$

$$(\nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{F}) \times_{\mathrm{I}} \nabla W + \nabla W \times_{\mathrm{II}} (\nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{F}).$$

$$\nabla_S \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla_{\mathrm{S}})\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathrm{S}})\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla_S \cdot \mathbf{G}) +$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F}\right) \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla \times^* \mathbf{G}\right)\right] - \{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla \cdot^* \mathbf{G}\right) \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\nabla \times^* \mathbf{F}\right)\right] +$$

$$(\nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{F}) \times (\nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{G}) - (\nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{F}) \times (\nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{G}).$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla_S)\mathbf{F} = \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{G}\right) \cdot \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_S \cdot \mathbf{F}\right) + \mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} \left(\nabla_S \times \mathbf{F}\right) =$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \left\{\mathbf{G} \,\tilde{\cdot} \left[\nabla_0^{-1} \cdot \left(\nabla_S \,\tilde{\cdot}\, \mathbf{F}\right)\right]\right\} + \mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} \left(\nabla_S \times \mathbf{F}\right).$$

$$\Delta_S \left(VW\right) = (\Delta_S V)W + (\Delta_S W)V + 4(\nabla_S V) \cdot (\nabla_S W) +$$

$$2\nabla V \cdot \left(\nabla \times^* \nabla_S W\right) + 2\nabla W \cdot \left(\nabla \times^* \nabla_S V\right) + \nabla_0 \cdot \left[\left(\nabla_0^{-1} \cdot \Delta V\right) \times^* \left(\nabla_0^{-1} \cdot \Delta W\right)\right].$$

Без применения «расщепления» векторных произведений на слагаемые, сопряжения векторов, использования линейной комбинации координат, ее деления на вектор, введения нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов получить представленные выше разложения было бы невозможно.

Замечание. Несмотря на то, что в некоторых приведенных разложениях использован мнимый оператор $\{\nabla_0\}$, разложения сами по себе являются «чистыми» скалярами или векторами.

Литература

1. Попов И. П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. 2009. Вып. 5. № 24 (162). С. 34–39.
2. Попов И. П. О пространственной конфигурации вихревого электрического поля // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 2. № 1 (15). С. 50–51.

I. Popov

SURFACE GRADIENT, DIVERGENCE AND ROTOR

We introduce the notion of the terms of vector products, which are the first (orthopositive) part and the second (orthonegative) part; further development of this concept is the notion of conjugate vectors, vector differential operator on the surface, the surface gradient, the derivative on the surface, the surface divergence and rotor. Surface functions, their surface differentiation and integration are considered. The features of surface functions for which all terms are functions of at least two variables, are shown; in addition, surface functions have mixed partial derivatives of the second order, while at least one of the mixed partial derivatives of second order of any term does not vanish . The theorem on the restoration of surface features on its surface gradient is proved. The notion of a linear combination of coordinates and its division into a vector, zero and zero imaginary vector operators, pseudo and combined vectors are introduced. A number of expansions using these operations are presented.

Key words: *vector, operator, surface, coordinates.*