

КОНУСНОЕ ПРЕДПОЧТЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

Для динамической, линейно — квадратичной, двухкритериальной проблемы рассматривается уточнённое по последовательности матриц решение. Это уточнение определяется на основе оценок ЛПР. Такой подход позволяет уменьшить неопределённость, а в пределе выявить единую целевую функцию. Матрица и соответствующий ей многогранный конус позволяют свести двухкритериальную проблему к стандартной задаче динамического управления.

Ключевые слова: динамическая многокритериальная задача, векторная оптимизация, уточнение по конусу.

Проблема принятия решений является одной из основных для человечества во все времена его существования. Недаром считается, что «качество принятых решений определяет качество жизни». Сталкиваясь повседневно с необходимостью выбирать тот или иной способ действий, человек использует при этом имеющиеся в его распоряжении логические возможности, проводя различные рассуждения, использует ассоциации, вспоминает аналогичные случаи, высказывает прогнозы, предположения, догадки, прибегает к интуиции, производит расчёты. При этом естественно стремление к таким решениям, которые приводят к наилучшим результатам. Такой выбор принято называть оптимальным.

По мере расширения и усложнения задач растёт потребность в научных способах выбора методов их решения. Это объясняется тем, что ошибки выбора в задачах большого масштаба или неоптимальные их решения приводят к огромным, а иногда и невозполнимым потерям. И это проблема нового времени, сто лет назад ошибочные решения не могли привести к катастрофе планетарного масштаба.

Научные подходы к проблеме нахождения оптимальных решений разрабатывались с древнейших времён. Однако только во второй половине двадцатого века возникли научные направления, для которых центральными являются вопросы о том, как человек принимает решения и как ему можно помочь в сложных задачах выбора. К группе таких дисциплин относятся исследование операций, кибернетика, искусственный интеллект. Отметим, что все они имеют математическое или, более широко, логическое основание. В них проблемы принятия решений рассматриваются с единых позиций, вне зависимости от области конкретного приложения. При этом выявляются общие черты и характеристики при принятии экономических, политических, социальных, технических и даже личных решений. Одной из таких моделей является многокритериальная динамическая задача.

Рассматривается линейно-квадратичная, динамическая двухкритериальная проблема

$$\Gamma = \langle \Sigma, U, \{J^{(i)}\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

Здесь динамика управляемой динамической системы Σ описывается системой двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t, x). \quad (2)$$

Вектор состояния $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Задан промежуток функционирования $t \in [0, 2]$. Скалярное управление с полной обратной связью имеет вид $u(t, x) = Q(t)x = q_1 x_1 + q_2 x_2$. Ограничения на управление отсутствуют. На реализованных траектории и управлении динамической системой $(x^*(t), u^*(t, x(t)))$ определены два критерия, заданные квадратичными функционалами, а именно,

$$J_1(u, 0, x_0) = -2x_1^2(2) - 3Cx_2^2(2),$$

$$J_2(u, 0, x_0) = -\int_0^2 u^2(t, x(t)) dt.$$

На содержательном уровне цель лица, принимающего решение (ЛПР), состоит в выборе такого управления $u(t, x) \in U$, при котором оба критерия примут возможно большие значения. Представленная задача является линейно-квадратичной, динамической двухкритериальной задачей.

В качестве решения задачи (1) будем рассматривать уточнённое по последовательности матриц решение. Это уточнение определяется на основе оценок ЛПР. Пусть эти предпочтения представлены стохастической матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Такая информация сокращает неопределённость относительно цели операции, но не снимает её полностью. Наилучший компромисс определяет левый собственный вектор матрицы A , а именно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Компромиссное решение состоит в оценке важности критериев, как 2 : 1. Тогда уточнённое управление является решением линейно-квадратичной динамической задачи

$$\Gamma_{2/3} = \left\langle \Sigma, U, \rho_{2/3}(u, 0, x_0) \right\rangle,$$

$$\rho_{2/3}(u(t), 0, x_0) = 2/3 J^{(1)}(u(t), 0, x_0) + 1/3 J^{(2)}(U(t), 0, x_0).$$

На основе условий оптимальности Беллмана [2, С. 366–369] получаем уточнённое управление с полной обратной связью:

$$u^* = u^*(t, x) = -D^{-1}(\alpha) \cdot B^T(t) \cdot \Theta(t) \cdot x =$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -3t + 6,25 & 1,5t^2 - 6,25t - 6,5 \\ 1,5t^2 - 6,25t - 6,5 & -t^3 + 6,25t^2 - 13t + 9,375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4,5t^2 - 18,75t - 19,5}{\Delta} x_1 + \frac{-3t^3 - 18,75t^2 - 39t - 28,125}{\Delta} x_2,$$

где $\Delta = 0,75t^4 - 6,25t^3 + 19,5t^2 - 28,125t + 16,34375$. Таким образом, в данном примере найдено управление, представляющее наилучшее компромиссное решение.

Наличие в задаче двух критериев является выражением неопределённости в системе, именно, неопределённости предпочтения ЛПР. В классификации неопределённостей в задачах управления она выделена в [3, С. 17] как «неопределённость, отражающая нечёткость знания игроками своих целей». Выявление единой целевой функции снимает эту неопределённость.

Рассматриваемый в работе процесс уточнения по последовательности конусов позволяет уменьшить неопределённость, а в пределе выявить единую целевую функцию. Такое уточнение существенно использует мнение ЛПР о соотношении между критериями. Эти мнения формализуются в форме матрицы предпочтений. Матрица и соответствующий ей многогранный конус позволяют свести двухкритериальную проблему к стандартной задаче динамического управления.

Литература

1. Матвеев В. А. Исследование конусной оптимальности в многокритериальной динамической задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. № 5 (118). С. 56–62.
2. Пантелеев В. И., Бортаковский А. С. Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003.
3. Жуковский В. И. Кооперативные игры при неопределённости и их приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

V. Matveev

CONE PREFERENCE IN THE DYNAMIC PROBLEM

For dynamic, linear-quadratic, two-criterion problem a solution by a sequence of matrices is considered. This refinement is based on estimates of the DM (decision maker). This approach reduces uncertainty and, in the limit level, reveals a united objective function. Matrix and the corresponding polyhedral cone allows us to reduce a two-criterion problem to the standard task of dynamic control.

Key words: *dynamic multicriteria problem, vector optimization, refining by cone.*