УДК 519.83

В. А. Фахретдинова

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ НЭША-ПАРЕТО В КОНЕЧНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ ИГРАХ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе рассматривается многошаговая позиционная игра N лиц в условиях неопределённости. Используется предложенная Г. У. Куном графовая формализация, где, в соответствии с подходом В. И. Жуковского, неизвестными считаются вероятностные характеристики реализации неопределённости. Установлено, что в игре, являющейся аналогом игры с полной информацией, существует равновесие Нэша-Парето в чистых стратегиях, а в игре с произвольной информационной структурой — равновесие Нэша-Парето в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: *многошаговая игра, позиционная стратегия, информационное множество, равновесие Нэша-Парето.*

Многошаговые процессы принятия решения при наличии неопределённых факторов рассматриваются при моделировании таких явлений, в которых стороны в момент принятия решения располагают различной информацией. Математической моделью, учитывающей особенности таких процессов, является многошаговая позиционная игра в условиях неопределенности.

Воспользуемся графовой формализацией, предложенной Г. У. Куном [1, с. 14].

Рассмотрим многошаговую игру N лиц Г, определенную на конечном древовидном графе *G=(X,V)* с выделенным корнем, расположенном в ориентированной плоскости; здесь X — множество вершин и V — множество дуг. Граф G называется *деревом игры*.

Альтернативами v в вершине $x \in X$ называются *дуги*, исходящие из этой вершины. Если x имеет j альтернатив, то их нумерация осуществляется в положительном, в смысле ориентации плоскости, направлении. Множество альтернатив в вершине x обозначим через $V(x)$.

Вершины, имеющие альтернативы, называются *промежуточными позициями*, остальные — *окончательными позициями*. Окончательные позиции будем обозначать ω.

Путь из выделенного корня в окончательную позицию ω называется *партией*. Указанный путь, очевидно, единственный.

Пусть $A \subset X$ — множество промежуточных позиций. *Альтернативным разбиением* называется разбиение множества A на множества A_j, $j = 1, 2,.$, где A_j содержит все позиции с j альтернативами.

Зададим на дереве игры $G = (X,V)$:

1^0. Разбиение P множества промежуточных позиций $A \subset X$ на $N+1$ множество P_i, $i = 0, 1, ..., N$. Разбиение P называется *разбиением по игрокам* или *разбиением на множества очередности*. Позиции из P_0 называются *позициями неопределённости (случая)*, позиции из P_i, $i = 1,...,N$ — *личными позициями* i *-го игрока.*

2^0. Разбиение $\boldsymbol{U}$ множества промежуточных позиций $A \subset X$ на множества $U \subset P_i \cap A_j$ такие, что никакое U не содержит двух позиций одной и той же партии. Разбиение $\boldsymbol{U}$ называется *информационным разбиением*, а его элементы $U \subset \mathbf{U}$ — *информационными множествами*.

3^0. Информационные множества $U \subset P_0 \cap A_j$ предполагаются одноэлементными, причём, в отличие о схемы Куна, вероятностные характеристики реализации неопределенности полагаются неизвестными[1].

4^0. Вещественнозначную векторную функцию $F(\omega) = (F_1(\omega), \ldots, F_N(\omega))$ для каждой окончательной позиции ω. Функция $F(\omega)$ называется *функцией выигрыша*. Ее i-ая компонента $F_i(\omega)$ является значением выигрыша i-го игрока, $i = 1, ..., N$, в окончательной позиции ω.

Согласно концепции позиционной стратегии [1, с. 21], понятие чистой позиционной стратегии определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{U}^i = \{U^i\} \succ \mathbf{U}$ — семейство информационных множеств i-го игрока, $V^i_{U^i}$ — множество соответствующих каждому информационному множеству $U^i \in \mathbf{U}^i$ альтернатив. *Чистой позиционной стратегией i-го игрока* называется отображение вида $s_i : \boldsymbol{U}^i \to V^i_{U^i}$.

Обозначим множество всех отображений s_i через S_i, $i = 1, \ldots, N$. *Смешанной стратегией i-го игрока* называется вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий S_i.

Ситуацией позиционной игры называется набор $s = (s_1, \ldots, s_N) \subset S_1 \times \ldots \times S_N = S$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Будем полагать *чистой реализацией неопределённости* правило, которое каждой позиции неопределённости $x \in P_0$ ставит в соответствие допустимую альтернативу $v \in V(x)$; $y : P_0 \to V(x)$. Естественным образом определяется смешанная реализация неопределённости. Множество всех правил y обозначим через Y. Ясно, что формально реализация неопределённости совпадает с понятием позиционной стратегии.

Цель i-го игрока, $i = 1, ..., N$, состоит в выборе такой чистой (смешанной) стратегии, что в результате реализации партий игры она доставляет игроку наибольшее значение компоненты $F_i(\omega)$ функции выигрыша (математического ожидания реализаций выигрышей, соответствующих смешанным стратегиям) с учётом действий остальных игроков и реализаций неопределённостей из Y.

В игре Γ ситуация $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ и реализация неопределённости $y \in Y$ однозначно определяют окончательную позицию ω и, значит, выигрыши игроков $F(\omega) = f(s, y)$.

Описанная задача называется *позиционной игрой N лиц в условия неопределённости.*

[1] Такой взгляд на неопределённость соответствует подходу В. И. Жуковского и В. С. Молостова, изложенному в [2], где известной предполагается лишь граница множества изменений неопределённых факторов.

В предложенной задаче каждый игрок, как обычно, ориентируется на возможность реализации «наименее благоприятных для всех игроков одновременно» значений неконтролируемых факторов — неопределённостей. Кроме того считаем, что относительно реализации неопределенности все игроки равноправны. Гарантированный смысл решению, таким образом, придаётся использованием оптимизации по Парето. Разыскивается такая реализация неопределённости $y' \in Y$, что если какая-либо другая реализация неопределённости $y \in Y$ уменьшает выигрыш какого-либо из игроков, то найдется другой игрок, который при этом увеличит свой выигрыш. В бескоалиционных играх N лиц в условиях неопределённости данный подход разрабатывался в [3, 4, 5].

Положим, что решением позиционной игры в условиях неопределённости Γ является равновесие Нэша-Парето.

Определение 1. *Набор* $(s^*; y^*) \in S \times Y$ *называется равновесием Нэша-Парето игры* Γ *если*

1. $\forall s_i \in S_i,\ i = 1,\dots,N,\ f_i(s^*; y^*) \geq f_i(s^* \| s_i, y^*),$ *(*)*

2. $\forall y \in Y\ \ f(s^*; y^*) \not\geq f(s^*; y).$ *(**)*

Здесь $(s^* \| s_i) = (s_1^*,\ s_2^*,\dots,s_{i-1}^*,\ s_i\ ,\ s_{i1}^*,\dots,s_N^*)$ *и* $f(s^*; y^*) \not\geq f(s^*; y)$ *означает, что система неравенств* $f_i(s^*; y^*) \geq f_i(s^*; y),\ i = 1,\dots,N$*, несовместна, причем по крайней мере одно из неравенств строгое.*

Рассматриваемое определение «достаточно» полное. В случае отсутствия неопределенности, то есть если $Y = \{y_0\}$, мы имеем дело с позиционной игрой, и предложенное определение есть равновесие в ней. В случае приведения позиционной игры к нормальной форме, предложенное решение есть равновесие Нэша-Парето в бескоалиционной игре N лиц в условиях неопределенности [4, с. 259].

Выделим класс позиционных игр в условиях неопределенности $\Im_0 = \{\Gamma_0\}$, в которых все информационные множества одноэлементны. Это аналог игры с полной информацией [1, с. 32].

Теорема 1. *В позиционной игре N лиц* Γ_0 *существует равновесие в чистых позиционных стратегиях и чистой реализации неопределенности.*

Доказательство. Игре Γ_0 поставим в соответствие позиционную игру $N+1$ лица с полной информацией. Рассматриваемая игра отличается от Γ_0 тем, что в ней отсутствует неопределенность, но имеется $N+1$-й игрок с множеством стратегий *Y*. Цель этого игрока — максимизировать функцию $f_{N+1}(s,y) = -\sum_{i=1}^{N} f_i(s,y)$. Согласно теореме Цермело-фон Неймана [1, с. 32] в игре $N+1$ лица с полной информацией существует ситуация равновесия в чистых стратегиях. Обозначим это равновесие $(s^*; y^*) \in S \times Y$. Тогда $f_i(s^*; y^*) \geq f_i(s^* \| s_i, y^*)$ $\forall s_i \in S_i,\ i = 1,\dots,N$, что есть условие (*) определения 1. Далее, $f_{N+1}(s^*; y^*) = -\sum_{i=1}^{N} f_i(s^*; y^*) \geq f_{N+1}(s^*; y) = -\sum_{i=1}^{N} f_i(s^*; y)$ или

$\sum_{i=1}^{N} f_i(s^*_{\ } y^*) \le \sum_{i=1}^{N} f_i(s^*_{\ } y)$. Из полученного неравенства следует несовместность системы неравенств $f_i(s^*_{\ } y^*) \ge f_i(s^*_{\ } y)$, $i = 1,...,N$, т. е. условие (**) определения 1. Учитывая, что $s^* \in S$ и $y^* \in Y$ — чистые стратегии игроков и чистая реализация неопределённости, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим игру Γ с произвольной информационной структурой, на дереве которой реализованы пп. 1^0–4^0. Для такой игры имеет место

Теорема 2. *В позиционной игре N лиц* Γ *существует равновесие Нэша-Парето, возможно в смешанных стратегиях и смешанной реализации неопределённости.*

Доказательство. Позиционную игру N лиц Γ в условиях неопределённости можно представить в нормальной форме. Обозначим множество стратегий i-го игрока S_i, $i = 1,...,N$, и Y — множество реализаций неопределённости. В силу конечности рассматриваемой позиционной игры эти множества конечны и, следовательно, компактны. Функция выигрыша $f(s, y)$ является непрерывной. Тогда, согласно [4, с. 261], существует равновесие Нэша-Парето в смешанных стратегиях. Поскольку смешанные стратегии в нормальной форме игры соответствуют смешанным стратегиям в позиционной форме, то утверждение теоремы доказано.

Приведем модельные примеры, иллюстрирующие теоремы 1 и 2.

Пример 1. Рассмотрим двухуровневую игру двух лиц в условиях неопределённости. Игра протекает следующим образом. Первый игрок выбирает одну из двух альтернатив v_i, $i = 1, 2$, и сообщает свой выбор второму игроку. Второй, зная выбор первого, также выбирает одну из двух альтернатив v_i, $i = 1, 2$. Независимо от действий игроков в игре реализуется некоторая неопределенность, которая также имеет две альтернативы. Дерево такой игры изображено на Рис. 1.

В этой игре каждой окончательной позиции отвечают два числа, которые соответствуют числовым значениям выигрыша первого (второго) игрока, соответственно. Игроки имеют позиционные стратегии: $S_1 : \{U_1^1\} \to \{v_1, v_2\}$, $S_2 : \{U_2^1, U_2^2\} \to \{v_1, v_2\}$, $Y : \{U_0^1, U_0^2, U_0^3, U_0^4, \} \to \{v_1, v_2\}$. Здесь U_i^j, $i = 0, 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$ - информационные множества, v_1, v_2 — альтернативы.

Согласно определению 1 в рассматриваемой игре равновесием Нэша-Парето является набор $(s_1^*, s_2^*, y^*) \in S_1 \times S_2 \times Y$, где $s_1^*(U_1^1) = (v_1)$, $s_2^*(U_2^1, U_2^2) = (v_1, v_2)$, $y^*(U_0^1, U_0^2, U_0^3, U_0^4) = (v_2, v_1, v_2, v_1)$. В этом примере реализуется равновесие в чистых стратегиях и чистой реализации неопределённости. Игроки гарантируют себе выигрыши $f_1^* = 9$, $f_2^* = 2$.

Пример 2. Рассмотрим игру, которая отличается от игры примера 1 информационной структурой. А именно, второй игрок имеет одно информационное множество U_2^1 (Рис. 2). В данном примере второму игроку уже неизвестны выборы первого.

Можно считать, что игроки делают свои выборы одновременно и независимо друг от друга, после чего реализуется некоторая неопределённость.

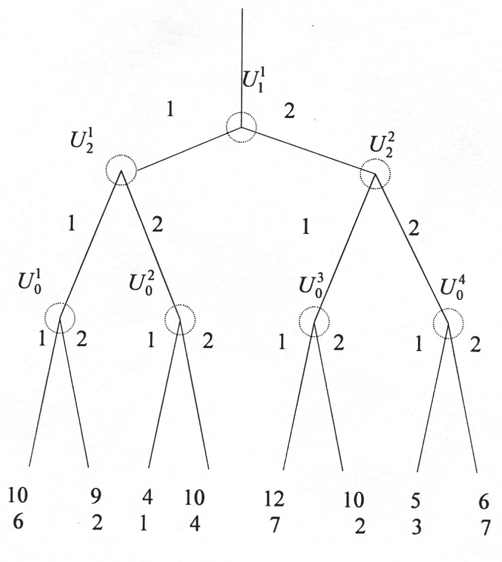

Рис.1.

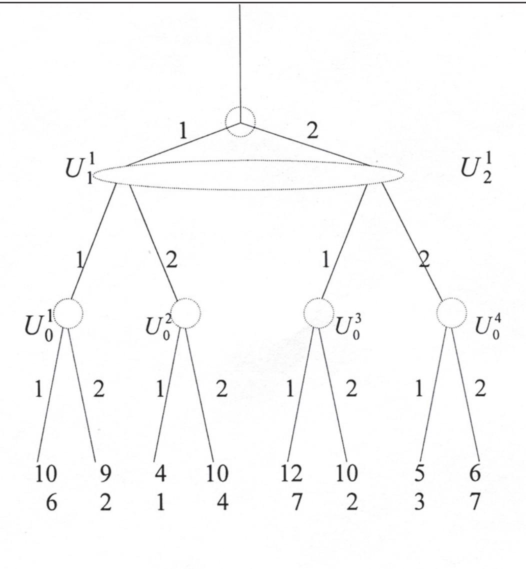

Рис. 2.

Изменение информационной структуры приводит к изменению стратегических возможностей второго игрока. Именно: $S_2 : \{U_2^1\} \to \{v_1,\ v_2\}$.

Согласно определению 1 в этой игре равновесием Нэша-Парето является набор $(s_1^0,\ s_2^0,\ y^0) \in S_1 \times S_2 \times Y$, где $s_1^0(U_1^1) = (v_2)$, $s_2^0(U_2^1) = (v_2)$, $y^0(U_0^1,\ U_0^2,\ U_0^3,\ U_0^4) = (v_2,\ v_1,\ v_2,\ v_1)$.

В этом примере игроки гарантируют себе выигрыши $f_1^0 = 5,\ f_2^0 = 3$.

Сравним результаты игр в примерах 1 и 2. Первый игрок, передав информацию о своих действиях сопернику (пример 1), увеличивает свой гарантированный выигрыш с 5 до 9 единиц и ухудшает гарантированный выигрыш второго игрока с 3 до 2 единиц. Таким образом, в данной игре первому игроку выгодно информировать о своих действиях противника.

Литература

1. Кун Г. У. Позиционные игры и проблема информации // Позиционные игры. М.: Наука, 1967. С. 13–40.
2. Жуковский В. И., Молоствов В. С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределённости. М.: МНИИПУ, 1988. 130с.
3. Сложные управляемые системы [Межвуз. сб. науч. тр.]. М.: РосЗИТЛ, 1996. 179 с.
4. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 320 с.
5. Zhukovskii V. I., Salukvadze M. E. The Vector-Valued Maximin. Boston, San Diego, New-York, London: Academic Press, 1994. 404 p.

V. Fahretdinova

EXISTENCE OF NASH-PARETO EQUILIBRIUM IN ULTIMATE POSITIONAL GAMES UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY

This paper considers the multi-stage positional game of N participants under uncertainty. A task graph formalization proposed by Kuhn is used. We consider the probability characteristics of the unknown uncertainties. This approach was proposed by V. I. Zhukovskii. It is shown that in a game with perfect information - Nash-Pareto equilibrium in pure strategies, where as in a game with arbitrary information structure, Nash-Pareto equilibrium in mixed strategies.

Keywords: *multistage game, positional strategy, information set, Nash-Pareto equilibrium.*