УДК 372.851

Л. В. Павлова

ПРЕДМЕТНЫЕ КОМПЕТЕНТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье рассматривается понятие компетентностной задачи и виды таких задач. Приводятся примеры с решениями предметных компетентностных задач.

Ключевые слова: *компетентность, предметные компетентностные задачи.*

Пересмотр требований к подготовке учащихся привёл к тому, что одним из приоритетных направлений обновления российского образования явилось внедрение компетентностного подхода в систему общего образования.

Требования к учащемуся владеть деятельностью, связанной с получением знаний, необходимых для решения определённых задач; владеть приёмами самостоятельной и продуктивной учебно-познавательной деятельности, использовать различные средства и методы познания приводят к необходимости развития его учебно-познавательной компетентности.

Наличие учебно-познавательной компетентности у учащегося будет обеспечивать ему не только успешное обучение в школе, но и реализацию своих способностей за её пределами, поскольку умение самостоятельно приобретать знания, владеть приёмами действий в нестандартных ситуациях являются необходимыми для самостоятельной жизнедеятельности.

Развитие учебно-познавательной компетентности должно осуществляться средствами и возможностями каждого учебного предмета. Содержание геометрии позволяет внести определённый вклад в решение данной проблемы.

Основными объектами школьной геометрии являются модели реальных объектов, для которых определяются геометрическая форма, размеры, взаимное расположение с другими объектами на плоскости и в пространстве. Таким образом, в отличие от алгебры и начал анализа содержание геометрии менее абстрактно, более образно, а потому есть возможность продемонстрировать связь математической теории и практических задач, с которыми учащиеся встречались (или могут встретиться). Стереометрия позволяет раскрыть эту связь, поскольку на уроках учащиеся имеют дело не только с плоскими геометрическими фигурами, но и с телами, а значит, большинство задач рассматривается в евклидовом трёхмерном пространстве, описывающем при некоторых условиях свойства реального пространства.

При компетентностном подходе к обучению математике акцент переносится на логику решения задачи, на анализ и выделение теоретических областей знаний, на прогнозирование процесса решения (предварительного, схематичного его представления в уме) на основе известных методов, приёмов и способов решения той или иной задачи.

Урок математики отличается от других уроков тем, что при изучении любой темы решается большое количество математических задач. Поэтому развивать компетентности приходится в большей степени с помощью задач. А одной из основных компетентностей, которая активно развивается на уроках математики, является учебно-познавательная, т. к. она связана с учебно-познавательной деятельностью —

основным видом деятельности школьников. Развитию этой компетентности могут способствовать так называемые компетентностные задачи.

Под компетентностными задачами, рассматриваемыми при изучении математики, мы будем понимать задачи, целью решения которых является разрешение стандартной или нестандартной ситуации (предметной, межпредметной или практической по описанному в ней содержанию) посредством нахождения соответствующего способа решения с обязательным использованием математических знаний. Основной особенностью таких задач является получение познавательного результата.

Важными отличительными особенностями компетентностных задач от стандартных математических (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

1. значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию учащегося;
2. условие задачи сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания (из разных разделов основного предмета — математики, из другого предмета или из жизни), на которые нет явного указания в тексте задачи;
3. информация и данные в задаче могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т. д.), что потребует распознавания объектов;
4. указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задачи.

Кроме выделенных четырёх обязательных особенностей, компетентностные задачи могут удовлетворять и следующим:

5. по структуре эти задачи — нестандартные, т. е. в структуре задачи обязательно неопределенны некоторые из её компонентов;
6. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задачи, что приводит к объёмной формулировке условия;
7. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причём данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

Можно выделить следующие типы компетентностных задач:

1. Предметные компетентностные задачи: в условии описана предметная ситуация, для решения которой требуется установление и использование широкого спектра связей математического содержания, изучаемого в разных разделах математики; в ходе анализа условия необходимо «считать» информацию, представленную в разных формах; сконструировать способ решения (путём объединения уже известных способов). Полученный результат обеспечивает познавательную значимость решения и может быть использован при решении других задач (заданий).

2. Межпредметные компетентностные задачи: в условии описана ситуация на языке одной из предметных областей с явным или неявным использованием языка другой предметной области. Для решения нужно применять знания из соответствующих областей, требуется исследование условия с точки зрения выделенных предметных областей, а также поиск недостающих данных, причём решение и ответ могут зависеть от исходных данных выбранных (найденных) учащимся.

***3. Практические компетентностные задачи*:** в условии описана практическая ситуация, для разрешения которой, нужно применять не только знания из разных предметных областей (обязательно включающих математику), но и приобретённые из повседневного опыта учащихся. Данные в задаче, не должны быть оторваны от реальности (должны соответствовать действительности, например цены, размеры дома и т. д.). Полученный результат должен быть значим для учащихся, т. е. указана его область применения.

Часто компетентностные задачи понимают только как задачи прикладного или межпредметного характера, в которых для разрешения некой практической ситуации нужно использовать знания того или иного предмета (или нескольких предметов одновременно). Мы считаем, что важным является применение и предметных компетентностных задач, где учащиеся учатся отбирать необходимые для решения знания из разных разделов в рамках одной предметной области (математика), причём на применение этих знаний не должно быть явного указания в тексте задачи.

Ниже приведены примеры предметных задач, которые можно отнести к компетентностным. Нами был выбран раздел геометрии «стереометрия», т. к. в результате анализа литературы (учебников, сборников задач, журналов и т. д.) выяснилось, что там приведено недостаточно примеров компетентностно-ориентированных задач, что усложняет работу учителя математики.

№ 1) *На рисунке 1 изображен многогранник. Известно, что площади боковых граней, образующих прямой угол, равны S_1 и S_1. Можно ли вписать данный многогранник в цилиндр? Если можно, то выразите площадь боковой поверхности цилиндра через S_1 и S_2. Сформулируйте аналогичные задачи, используя данные, приведенные в каждой строке Таблицы 1, и решите их. Охарактеризуйте результат каждой из построенных задач. Как Вы думаете, если в основании многогранника будет лежать произвольный треугольник, можно ли его вписать в цилиндр? Ответ обоснуйте.*

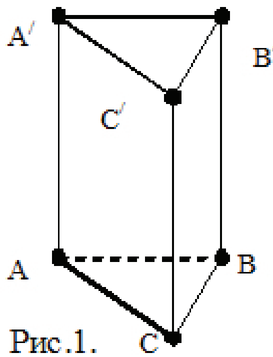

Рис.1.

Таблица 1

№	BC	AC	AB	S_1	S_2	Дополнительные данные
1.	3	—	4	40	30	$AA' \perp (ABC)$; $AA' \perp (ABC)$
2.	3	7	9	90	30	$A'B' \parallel AB$; $C'B' = CB$
3.	5	9	—	—	—	$AA' = BB' = CC'$

Примечание к задаче № 1. При решении задачи потребуется: применить знания планиметрии (вокруг любого треугольника можно описать окружность); доказать, что гипотенуза треугольника будет являться диаметром описанной окружности (и, соответственно, диаметром основания цилиндра). Математической моделью будет являться система из трёх уравнений с тремя неизвестными, решая которую нужно вывести зависимость площади боковой поверхности цилиндра от площади боковых граней призмы, вписанной в цилиндр. Также требуется исследовать и обосновать, что любую треугольную призму можно вписать в цилиндр.

Данная задача соответствует следующим отличительным особенностям, характеризующим компетентностные задачи:

— познавательная и профессиональная значимость получаемого результата (выводится формула нахождения площади боковой поверхности цилиндра через параметры многогранника, который вписан в этот цилиндр — формируется умение выводить формулы в общем виде и работать с ними; доказывается, что любую прямую треугольную призму можно вписать в прямой круговой цилиндр — это может быть использовано при решении других задач);

— условие задачи сформулировано как математическая ситуация, для разрешения которой используются знания, на которые нет явного указания в тексте задачи (например, из планиметрии);

— данные в задаче представлены в различной форме (текст, рисунок, таблица).

Кроме того:

— задача нестандартная (требуется дополнительное исследование условия, самостоятельный отбор знаний, которые нужны для решения задачи, а также неизвестен способ решения задачи);

— наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задачи, что приводит к объемной формулировке условия (в Таблице приведены три различных случая, в которых предложены ситуации с избыточными, недостающими и противоречивыми данными).

№ 2) *В основании пирамиды лежит правильный треугольник, стороны которого равны a. Два боковых ребра пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные* α *, а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом* β*. Можно ли с помощью имеющихся данных найти объем пирамиды? Если это возможно, найдите объем пирамиды.*

Примечание к задаче № 2. Данная задача является предметной задачей на вычисление с параметрами (буквенными данными). Поэтому в первую очередь надо установить возможные области изменения параметров. Очевидно, что a — длина стороны основания пирамиды — может быть любым положительным числом, т. е. $a > 0$. Углы α , как углы наклона боковых ребер к основанию, т. е. углы между этими ребрами и их проекциями на основание, могут быть лишь острыми: $0^0 < \alpha < 90^0$. Что касается угла β — двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания, то этот угол может меняться в пределах $0^0 < \beta < 180^0$.

При этих условиях, которые мы уточним в процессе дальнейшего решения, можно перейти к поиску решения. Но предварительно нужно построить схематическую запись задачи, и, в частности, чертеж заданной пирамиды, иначе трудно будет искать неизвестные величины и выполнять план решения.

Построим заданную в задаче пирамиду. Но очевидно, что чертеж этой пирамиды существенно зависит от того, как наклонена указанная боковая грань к плоскости основания, т. е. каково значение параметра β. Возможны три случая:

1) $0^0 < \beta < 90^0$; 2) $\beta = 90^0$; 3) $90^0 < \beta < 180^0$.

Этим трем случаям соответствуют три различных вида пирамиды, изображенные соответственно на Рисунке 2.

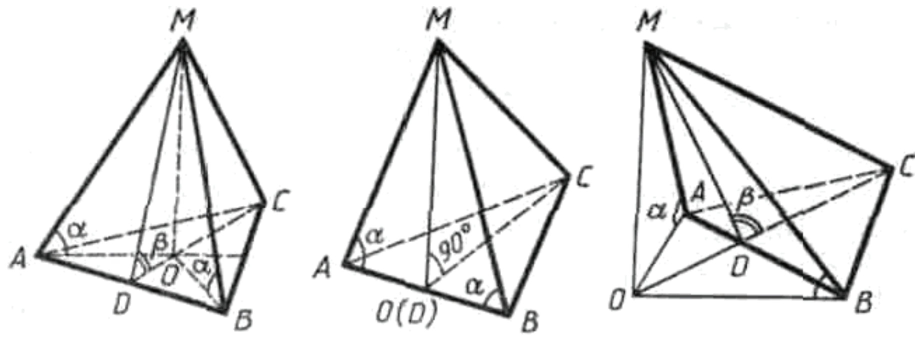

Рис. 2.

Для того, чтобы построить углы наклона ребер *AM* и *BM* к плоскости основания, опускаем из вершины M перпендикуляр *MO* на плоскость основания. Тогда, очевидно, *AO* и *BO* будут проекциями ребер *AM* и *BM* и, следовательно, $\angle MAO$ и $\angle MBO$ будут указанными углами. Для того, чтобы построить линейный угол двугранного угла, образованного гранью AMB с плоскостью основания, проводим *OD* перпендикулярно *AB* (заметим, что при $\beta = 90^0$ точки *O* и *D* совпадают). Тогда по известной теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AB$. Так как $\Delta OAM = \Delta OBM$, то $AM = BM$. Отсюда следует, что высота *MD* проходит через середину *AB*. Учитывая, что ΔABC правильный, получаем, что продолжение *OD* должно проходить через вершину C. Тогда $\angle COM$ и есть линейный угол указанного двугранного угла.

Дано: $AB = BC = CA = a$; $MO \perp (ABC)$; $OD \perp AB$; $\angle OAM = \angle OBM = \alpha$; $\angle CDM = \beta$. Найти: *V* пирамиды.

Далее, рассматривая все три случая и используя формулу объёма пирамиды, находим общую формулу для объёма.

В данном случае проверка решения сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденным формулам действительно можно вычислить *такой объем, который* принадлежит области определения $V(x)$. Очевидно, что должно соблюдаться лишь одно условие: $V>0$. Рассматривая полученные формулы для V во всех трех случаях и учитывая указанные при этом условия задачи, легко убеждаемся в выполнении указанного условия.

Просматривая внимательно решение, замечаем, во-первых, что при решении подобных задач важно предварительно при анализе задачи установить области изменения параметров и в процессе решения уточнить эти области, если требуется. Следовательно, при решении подобных задач надо анализировать каждый шаг решения с точки зрения его выполнимости при предварительно найденных или заданных условиях и при необходимости эти условия уточнять, тем самым, сужая области изменения параметров.

№ 3) *На ребрах AB, AC и SC правильной пирамиды SABCD, у которой все плоские углы при вершине S прямые, взяты соответственно точки D, E и F — середины этих ребер. Найти угол, образованный прямыми DF и SE.* (Требуется решить задачу тремя разными способами: вычислительным, векторно-координатным и геометрическим; оценить рациональность каждого из решений).

Решение: **I способ** (вычислительный): Сначала построим какой-нибудь угол, равный искомому углу (Рис. 3). Например, в плоскости SAC, которая проходит через прямую SE — одну из данных скрещивающихся прямых и точку F, взятую на другой из них, проведем через точку F прямую $FK \parallel SE$. Тогда угол между прямыми DF и FK равен искомому углу. Найдем угол DFK. Обозначим $\angle DFK = \varphi$. Соединим точки D и K. Таким образом, угол φ мы включили в ΔDFK. Вычислим длины сторон треугольника.

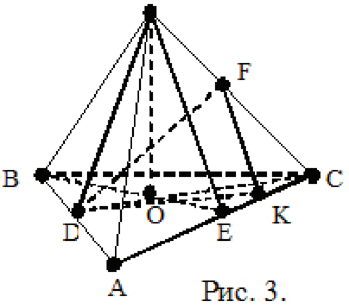

Рис. 3.

Пусть сторона основания пирамиды равна a. ΔSAC — равнобедренный, с прямым углом при вершине $S \Rightarrow$ медиана $SE = \frac{1}{2}AC \Rightarrow FK$ — средняя линия $\Delta SEC \Rightarrow$ $FK = \frac{a}{4}$. Рассмотрим ΔSDF и найдем сторону DF, т. к. $SC \perp SA$ и $SC \perp SB$, то $SC \perp SD$. Поэтому в $\Delta SDF \Rightarrow DF = \sqrt{SD^2 + SF^2}$. Но $SD = \frac{a}{2}$; $SF = \frac{1}{2} \cdot SC$, где из прямоугольного равнобедренного $\Delta SAC \Rightarrow SC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SF = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$$DF = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Рассмотрим ΔADK: $DK^2 = AD^2 + AK^2 - 2AD \cdot AK \cdot \cos(D\hat{A}K)$, т. е. $DK^2 = \frac{7a^2}{16}$. Из равенства $DK^2 = DF^2 + FK^2 - 2DF \cdot FK \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 90^0$. Это означает, что угол между прямыми DF и SE также равен 90^0.

II способ (векторно-координатный): т. к. пирамида правильная, то $SA=SB=SC$. Кроме того, все углы при вершине S по условию прямые. Поэтому можно ввести в пространстве прямоугольную систему координат, началом которой является точка S, а отрезки SA, SB и SC — единичными отрезками соответственно осей Sx, Sy и Sz (Рис. 4). В этой системе координат точки S, A, B, C имеют следующие координаты: $S(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Теперь найдем координаты векторов $\vec{DF}$ и $\vec{SE}$.

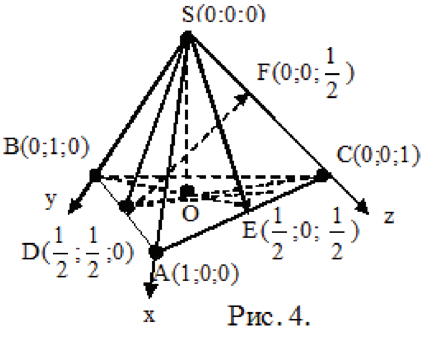

Рис. 4.

Для этого найдем координаты следующих точек:

$D(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$, $F(0;0;\frac{1}{2})$, $E(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$.

Тогда $\vec{DF}\ (-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ и $\vec{SE}\ (\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$.

$$\text{Следовательно, } \cos(\widehat{\vec{DF},\vec{SE}}) = \left|\cos(\widehat{\vec{DF},\vec{SE}})\right| = \frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = 0$$

$\Rightarrow$ угол между прямыми DF и SE равен 90^0.

III способ (геометрический): т. к. отрезки $SA=SB=SC$ и попарно перпендикулярны, то можно принять их за ребра куба, выходящие из одной вершины. Построим этот куб (Рис. 5) и заданные точки D, E и F. Соединим вершины P и C куба и проведем диагональ SQ.

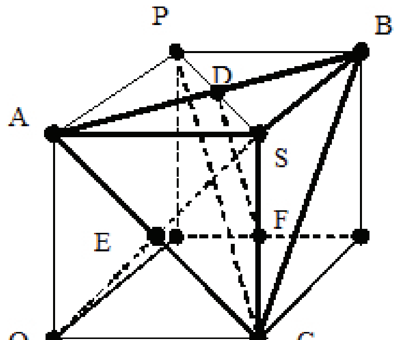

Рис. 5.

$DF||PC$ (т. к. DF — средняя линия ΔPSC), т. е. угол между прямыми PC и SQ равен искомому углу. Ясно, что прямая AC является проекцией прямой PC на плоскость SAC и $AC \perp SQ$ $\Rightarrow$ и наклонная $PC \perp SQ$ $\Rightarrow$ $DF \perp SE$ $\Rightarrow$ угол между прямыми DF и SE равен 90^0.

IV способ (векторный): Обозначим $\vec{SA}=\vec{a}$; $\vec{SB}=\vec{b}$; $\vec{SC}=\vec{c}$ (см. рис. 6).

Тогда $\vec{DF}=\vec{DS}+\vec{SF}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}}{2}=\frac{\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}}{2}$, а $\vec{SE}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.

$$\vec{DF}\cdot\vec{SE}=\frac{\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}\vec{c}-\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}+\vec{c}^2-\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}}{4},$$

но $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Кроме того, $|\vec{a}|=|\vec{c}|$ $\Rightarrow$

$$\vec{DF}\cdot\vec{SE}=\frac{|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2}{4}=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2}{4}=0 \quad\Rightarrow\quad DF\perp SE \quad\Rightarrow$$

угол, образованный прямыми DF и SE, равен 90^0.

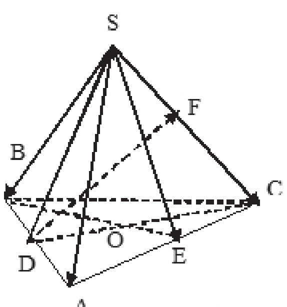

Рис. 6.

Подобные задачи предлагались для решения студентам физико-математического факультета на занятиях по элементарной математике. Также их можно решать и со школьниками, например задачу № 3 при повторении различных способов решения задач.

Литература

1. Башмаков М. И. Математика: Учеб. пособие для 10–11 кл. гуманит. профиля. М.: Просвещение, 2004. 336 с.
2. Харитонова О. В. Развитие учебно-познавательной компетентности старшеклассников на уроках геометрии. Дис. … канд. пед. наук. СПб., 2006. 167 с.
3. Элементарная математика: Практикум по решению задач: Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2009. 283 с.

L. Pavlova

SUBJECT COMPETENCE-ORIENTED MATHEMATICAL PROBLEMS

The article discusses the concept of competency objectives and types of corresponding problems. Examples of competence-oriented mathematical problems with solutions are given.

Key words: *competency, subject competence-oriented problem.*