УДК 51 (091)

Н. М. Алимова

О ТЕРМИНЕ «SERIES-LIMITES» П. С. ЛАПЛАСА

Статья посвящена анализу термина «series-limites», введенного французским учёным П. С. Лапласом для асимптотических рядов. В историко-математической литературе на русском языке закрепился неправильный перевод этого термина.

Ключевые слова: *асимптотические ряды, сходимость рядов, история математики, история асимптотических методов.*

В историко-математической литературе, касающейся истории развития асимптотических рядов, иногда говорится о том, что П. С. Лаплас ввел для этих рядов название «предельных» и указывается в скобках написание этого словосочетания как «series limites» [4, с. 268; 6, с. 467]. В действительности Лаплас называл эти ряды «series-limites», что представляет собой единый термин.

В ставших уже классическими монографиях [2, 5] представлены содержательные обзоры по истории асимптотических рядов. При этом Э. Т. Копсон приводит правильное написание термина Лапласа — «series-limites», а Р. М. Мордасова, автор перевода на русский язык монографии Э. Копсона, отмечает, что этот термин не нашёл распространения в русском языке и не даёт перевода. Э. Я. Риекстыньш в своих монографиях по асимптотическим методам уделяет много места историческим экскурсам, но не касается терминологии Лапласа. Этот вопрос опущен и в статье известного историка математики А. П. Юшкевича [7]. Приведённые факты свидетельствуют о трудности перевода введенного Лапласом термина на русский язык.

В русской математической литературе термин «предельные ряды» появился, по-видимому, в работах Н. И. Лобачевского, который изучал вопросы сходимости рядов. В одной из своих работ он писал: «К тому же здесь интегралы разлагаются в предельные строки (series-limites), как называл их Лаплас…» [3, с. 239]. В терминологии Н. И. Лобачевского строкой назывался ряд. Возможно, Н. И. Лобачевский не придал значения дефису между словами, либо сознательно пренебрег им для подходящего перевода, но это придало иной смысл термину. М. В. Чириков, автор наиболее полного исследования по истории асимптотических рядов [6], анализировал статьи Лобачевского, но не обратил внимания на употребленный Лобачевским перевод термина Лапласа. В дальнейшем многие авторы уже ссылались на М. В. Чирикова, что привело к закреплению неправильного перевода термина Лапласа «series-limites» как «предельные ряды» в историко-математической литературе [1, 4].

Мы обратились к оригиналу «Аналитической теории вероятностей», в которой Лаплас ввёл этот термин (работа впервые опубликована в 1812 году) и попытались понять, как возник термин. Приведём наш перевод отрывка из первой главы тома I: «Заканчивая введение, сделаем одно важное замечание о сходимости некоторых часто используемых рядов. Эти ряды очень быстро сходятся в первых членах, но часто эта сходимость уменьшается и превращается в расходимость. Она не должна препятствовать использованию этих рядов; необходимо применять только первые члены, на которых сходимость быстрая, так как остаток ряда, который отбрасывается, … очень мал по сравнению с тем, что предшествует» [9, с. 174]. Далее Лаплас рассматривает конкретный пример разложения несобственного интеграла в знакочередующийся функциональный ряд

$$\int_T^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1-\frac{1}{2T^2}+\frac{3!!}{2^2T^4}-\frac{5!!}{2^3T^6}\right)+\frac{7!!}{2^4}\int_T^{+\infty}\frac{e^{-t^2}dt}{t^8}$$

и поясняет: «Предыдущий ряд, однако, может быть использован, несмотря на то, что он расходится, так как даёт верное значение после того, как отброшенные члены будут меньше члена, на котором произошла остановка. Этот ряд обладает еще таким свойством, что он может быть больше или меньше своего истинного значения в зависимости от того, на каком члене произошел обрыв — положительном или отрицательном. По этой причине будем называть данный вид рядов series-limites» [4, с. 175].

Обратим внимание на две стороны приведённого фрагмента книги П. С. Лапласа — содержательную и терминологическую. Во-первых, заметим, что Лаплас очень близко подошёл к определению асимптотического ряда, введённому позже А. Пуанкаре. Рассуждая об остатке ряда и том, «что предшествует», Лаплас на примере показывает, что он сравнивает остаток не с частичной суммой первых членов ряда, а лишь с модулем ее последнего члена. Эта величина является достаточно маленькой при больших значениях аргумента. На современном языке это означает, что разность между интегралом и частичной суммой ряда при больших значениях переменной есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с модулем последнего члена частичной суммы: $I - S_n(t) = o(|a_n(t)|)$.

Лаплас заметил, что ряд пригоден для приближений при больших значениях переменной, если использовать первые члены. В этом состоит существенное отличие асимптотической сходимости рядов от сходимости в смысле Коши. В определении сходимости по Коши значение переменной фиксировано, а число суммируемых членов стремится к бесконечности. При асимптотической сходимости переменная стремится к некоторому значению, а число членов — любое фиксированное. Таким образом, Лаплас отметил особенности асимптотических рядов, но не смог четко сформулировать определение.

Во-вторых, вводя термин «series-limites», Лаплас обращает внимание на то, что частичные суммы ряда последовательно дают оценку сверху и снизу значения интеграла. Последовательность частичных сумм с четными номерами представляет собой систему нижних границ, а последовательность частичных сумм с нечетными номерами — систему верхних границ. Поэтому переводить термин «series-limites» как «предельные ряды» нельзя, поскольку речь идет не о предельном переходе, а о границах. Этому словосочетанию трудно подобрать эквивалент в русском языке. Математический смысл термина «series-limites» — «ряды, порождающие систему границ», «ограниченные ряды».

Термин Лапласа не нашёл признания ни у современников, ни у последующих поколений математиков. Большее распространение получило название, данное годом раньше (в 1811 г.) Лежандром, — «demiconvergentes» («полусходящиеся») [10, с. 267]. Это название тоже не очень удачно, но психологически более понятно: начиная с Л. Эйлера [8, с. 357], многие математики считали отличительной особенностью расходящихся асимптотических рядов ту, что члены ряда вначале по модулю убывают, а затем начинают расти. Такое поведение присуще рядам, полученным по формуле суммирования Эйлера-Маклорена, и связано со свойствами чисел Бернулли, которые являются коэффициентами этих рядов. Поскольку формула Эйлера-Маклорена долгое время была единственным источником расходящихся асимптотических рядов, то это привело к абсолютизации поведения любых асимптотических рядов. До настоящего времени встречаются утверждения, что асимптотические ряды вначале сходятся, а затем расходятся. Такое поведение считали характерным для расходящихся асимптотических рядов Гаусс, Лежандр, Лаплас, Коши, Лобачевский, Стокс, Стилтьес. Даже А. Пуанкаре, вводя определение асимтотического ряда на примере $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^n}$, считал, что этот ряд ведет себя точно так же, ибо полагал коэффициенты $A_n, n = \overline{0, \infty}$ ограниченными условиями $0 < A_n < 1$ [11, с. 297]. За расходящимися асимптотическими рядами закрепилось название «полусходящиеся». Этим термином пользовались такие математики как Дж. Стокс и Т. Стилтьес, внёсшие большой вклад в развитие асимптотических методов. Это название, как данное Лежандром, упоминается и в руководствах по асимптотическим разложениям [2, 5].

Из сказанного следует, что закрепление научного термина иногда существенно зависит от осмысления учёными того понятия, которое оно обозначает. Термин «series demiconvergentes» Лежандра оказался более приемлемым, чем термин «series-limites» Лапласа, хотя Лаплас более точно выделил особенности данных рядов. Окончательно утвердился термин, введенный А. Пуанкаре, — «serie asymptotique» [11, с. 297], так как оно ассоциировалось с хорошо известным геометрическим понятием и соответствовало содержанию, которое вкладывалось в термин.

Литература

1. История отечественной математики. Т. 2 / Под ред. И. З. Штокало. Киев: Наукова думка, 1967. 616 с.
2. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 160 с.
3. Лобачевский Н. И. Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функции от весьма больших чисел // Учёные записки, издаваемые императорским Казанским университетом. 1835. Книжка II. С. 211–342.
4. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1987. 318 с.
5. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. 390 с.
6. Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов // Историко-математические исследования. Т. XIII. М.: Физматгиз, 1960. С. 441–472.
7. Юшкевич А. П. Дифференциальное и интегральное исчисление / История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 3. М.: Наука, 1973. С. 241–268.
8. Euler L. Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae // Opera Omnia. 1924. Ser. I. T. 14. P. 350–362.
9. Laplace P. S. Theorie analytique des probabilities. Paris: Coursier, 1820. 506 s.
10. Legendre A. M. Exercices de calcul integral. Vol. I. Paris: Coursier, 1811. 348 s.
11. Poincare H. Sur les integrals irregulieres des equations lineaires // Acta Mathematica. 1886. Vol. 8. P. 295–344.

N. Alimova

ABOUT TERM “SERIES-LIMITES” BY P. S. LAPLAS

The article deals with the analysis and interpretation of the term “series-limites” introduced by French scientist P. S. Laplas for asymptotic series. In Russian mathematical literature incorrect translation of that term is fixed.

***Key words:** asymptotic series, convergence of series, history of mathematics, history of asymptotic methods.*