МАТЕМАТИКА И ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЕ

Алимова Н.М.

О РЕШЕНИИ ВИЕТОМ УРАВНЕНИЯ ВАН РОУМЕНА

В 2010 году исполнится 470 лет со времени рождения выдающегося французского математика Франсуа Виета (1540-1603). Виета называют “отцом буквенной алгебры”. Он первым ввел буквенные обозначения для неизвестных и известных величин, благодаря чему стало возможным производить действия над алгебраическими выражениями, описывать свойства уравнений и их корней общими формулами. Научное творчество Виета явилось переходом от математики постоянных величин к математике переменных величин.

Все работы Виета были пронизаны влиянием греческой геометрии: соблюдение размерности величин в уравнениях, использование непрерывной пропорции, поиск решения задач о трисекции угла и квадратуре круга. Виет получил много новых результатов, оригинально применив идеи классической математики к решению кубических уравнений, аналитическому представлению числа π , решению задачи Аполлония. Красота и изящество методов Виета, его открытия в области алгебры и тригонометрии, введение им буквенной символики сделали имя Виета весьма знаменитым.

О его жизни известно немного. Он родился в семье прокурора в небольшом городке Фонтене-ле-Конт. Получив юридическое образование, Виет занялся частной адвокатской практикой, а затем перешел на государственную службу. Он прошел путь от члена окружного суда провинциального городка до советника короля. Его придворная деятельность началась в 1580 году при Генрихе III, продолжилась при Генрихе IV и длилась более двадцати лет - до конца жизни Виета. При этом все свободное время Виет увлеченно занимался математикой.

Настоящая статья посвящена содержанию математической стороны события, о котором непременно упоминается во всех рассказах о Виете. В 1594 году Виет прославился как математик на всю Европу. Напомним кратко суть этого события. Известный голландский математик того времени Адриан ван Роумен предложил математикам Европы решить составленное им уравнение 45-й степени и разослал письменный вызов в разные страны. Во Францию он письмо не отправил, так как считал, что там нет математика, способного решить поставленную задачу.

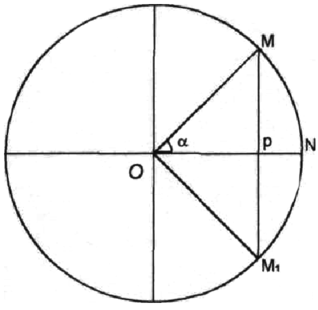
Уравнение Ван Роумена имело вид:

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12\,300x^{39}+111\,150x^{37}-740\,259x^{35}+3\,764\,565x^{33}-14\,945\,040x^{31}+$$
$$+46\,955\,700x^{29}-117\,679\,100x^{27}+236\,030\,625x^{25}-378\,658\,800x^{23}+483\,841\,800x^{21}-$$
$$-488\,494\,125x^{19}+384\,942\,375x^{17}-232\,676\,280x^{15}+105\,306\,075x^{13}-34\,512\,075x^{11}+$$
$$+7\,811\,375x^{9}-1138\,500x^{7}+95\,634x^{5}-3\,795x^{3}+45x=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}\,. \quad (1)$$

Король Франции Генрих IV случайно узнал об этом вызове в разговоре с послом Нидерландов. Он приказал позвать своего советника Виета, который уже был хорошо известен в Париже как математик и имел опубликованные работы. В присутствии посла, короля и свиты Виет сразу указал одно решение уравнения, а на следующий день - еще двадцать два.

Мы привели уравнение ван Роумена полностью по двум причинам. Во-первых, в большинстве статей, посвященных Виету, уравнение приводится частично. Кроме того, правая часть уравнения чаще всего бывает записана неверно. Во-вторых, нигде не рассматривается решение этого уравнения. Полный вид этого уравнения вызывает недоуменный вопрос: что должен был знать Виет, чтобы суметь сразу увидеть решение? Какое это решение? Маловероятно, что современный человек, изучавший высшую математику, может повторить результат Виета в аналогичных условиях. Вместе с тем, понятно, что уровень развития математики в конце шестнадцатого века был невысоким, а значит, решение Виета должно было основываться на простой идее. Мы попытались получить ответы на эти вопросы.

К сожалению, мы не имеем возможности ознакомиться с решением Виета по изданию его сочинений, и не располагаем сведениями об издании на русском языке работ Виета. Реконструкцию решения Виета мы провели, опираясь на некоторые идеи математики того времени и факты научной биографии Виета, упоминаемые в различных источниках.



С именем Виета связаны значительные достижения в тригонометрии в конце XVI века. Виет изложил вопросы плоской и сферической тригонометрии, составил тригонометрические таблицы, дал полное решение задачи об определении всех элементов треугольника по трем данным, дал доказательство теоремы синусов. Виет рассматривал не тригонометрические функции в современном смысле, а отношения сторон прямоугольных треугольников. Кроме того, он рассматривал не величины синусов и косинусов углов, а длины хорд соответствующих двойных углов, т.е. $2r\sin\alpha$ и $2r\cos\alpha$ (рис.1). Эта традиция восходит к греческой математике, на которой Виет был воспитан.

Используя формулы разложения в произведение суммы или разности синусов (косинусов), Виет получил формулы для выражения синусов и косинусов кратных углов:

$$\begin{aligned}\sin m\alpha &= 2\cos\alpha\sin(m-1)\alpha-\sin(m-2)\alpha\\ \sin m\alpha &= 2\sin\alpha\cos(m-1)\alpha+\sin(m-2)\alpha\\ \cos m\alpha &= 2\cos\alpha\cos(m-1)\alpha-\cos(m-2)\alpha\\ \cos m\alpha &= -2\sin\alpha\sin(m-1)\alpha+\cos(m-2)\alpha\end{aligned} \quad (\mathrm{I}).$$

Применяя последовательно формулы (I), он получил общие формулы разложения $\sin m\alpha$ и $\cos m\alpha$ по степеням $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. В современных обозначениях эти формулы записываются так:

$$\begin{aligned}\cos m\alpha &= C_m^0\cos^m\alpha-C_m^2\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha+\ldots\\ \sin m\alpha &= C_m^1\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha-C_m^3\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots\end{aligned} \quad (\mathrm{II})$$

Заметим, что в формулах (II) для $\cos m\alpha$ содержатся только четные степени синусов, поэтому, применив основное тригонометрическое тождество, $\cos m\alpha$ всегда можно представить в виде многочлена по степеням $\cos\alpha$. Очевидно, что для $\sin m\alpha$ разложение по целым степеням $\sin\alpha$ возможно только при нечетных значениях m. Как уже упоминалось, Виет рассматривал зависимости для удвоенных синусов и косинусов. Формула зависимости $2\sin m\alpha$ от $2\sin\alpha$ при нечетных m в современных обозначениях имеет вид:

$$2\sin m\alpha = m(2\sin\alpha) - \frac{m(m^2-1)}{4\cdot 6}(2\sin\alpha)^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}(2\sin\alpha)^5 - \ldots \quad \text{(III)}.$$

Опираясь на формулы (II) и (III), Виет изящно применил их к решению кубических уравнений в неприводимом случае, задачи о трисекции угла, уравнений высших степеней. Самые интересные результаты Виета относятся к этой области.

Рассмотрим решение Виетом кубических уравнений, с которыми и связано возникновение интересующего нас способа. Со времени открытий Н.Тартальи и Д. Кардано были известны уравнения третьей степени, к которым неприменимы формулы Тартальи - Кардано. Это уравнения вида

$$x^3 = px + q \ (2) \qquad \text{и} \qquad x^3 + q = px \ (3),$$

где p и q - положительные числа. Эти уравнения получили название неприводимого случая. Виет усмотрел внешнее сходство этих уравнений с формулами для синуса и косинуса тройного угла и придумал, как выразить решение этих уравнений при помощи тригонометрических функций.

Если в тождестве

$$2r\cos 3\alpha = 2r(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = 8r\cos^3\alpha - 6r\cos\alpha = \frac{(2r\cos\alpha)^3}{r^2} - 3(2r\cos\alpha)$$

считать величину $2r\cos 3\alpha$ известной, а величину $2r\cos\alpha$ - неизвестной, то обозначив $2r\cos 3\alpha = a$, $2r\cos\alpha = x$, из тождества получим уравнение $a = \frac{x^3}{r^2} - 3x$. После преобразований оно примет вид $x^3 - 3r^2x = ar^2$ (4).

Сравнив уравнения (2) и (4), Виет обозначил в (2) коэффициенты следующим образом: $p = 3r^2$, $q = ar^2$ и дал решение неприводимого уравнения (2) в виде $x = 2r\cos\alpha$. Таким образом, он показал, что решение такого уравнения можно получить с помощью тригонометрических функций: по известной величине $\cos 3\alpha$ найти $\cos\alpha$. Ранее было известно, что к уравнению (2) сводится знаменитая задача о трисекции угла.

Величины $2r\cos 3\alpha$ и $2r\cos\alpha$ указывают на их интерпретацию как длин хорд окружности радиуса r. Все члены уравнения (4) имеют одинаковую размерность.

Аналогично, Виет свел второе неприводимое уравнение (3) к трисекции угла, опираясь на формулу $2r\sin 3\alpha = 3(2r\sin\alpha) - r(2\sin\alpha)^3$. Обозначив, $2r\sin 3\alpha = a$, $2r\sin\alpha = x$, получим уравнение $x^3 + ar^2 = 3r^2x$ (5). Если переобозначить коэффициенты уравнения (3) так же, как в предыдущем случае, то его решение сводится к определению величины $\sin\alpha$ через известную величину $\sin 3\alpha$.

Решение кубических уравнений навели Виета на мысль о применении тригонометрических функций к решению уравнений более высоких степеней.

Пусть в формулах (III) $m = 5$, тогда

$$2\sin 5\alpha = 5\cdot(2\sin\alpha) - \frac{5\cdot 24}{4\cdot 6}(2\sin\alpha)^3 + \frac{5\cdot 24\cdot 16}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}(2\sin\alpha)^5.$$

Если обозначим $a = 2\sin 5\alpha$, $x = 2\sin\alpha$, то получим равенство

$x^5 - 5x^3 + 5x = a$ (6).

К такому равенству приводит и разложение для $2\cos 5\alpha$.

При $m = 7$ из формул (III) получаем:

$$2\sin 7\alpha = 7\cdot(2\sin\alpha) - 14(2\sin\alpha)^3 + 7(2\sin\alpha)^5 - (2\sin\alpha)^7.$$

Если обозначим $a = 2\sin 7\alpha$, $x = 2\sin\alpha$, то получим равенство

$-x^7 + 7x^5 - 14x^3 + 7x = a$ (7).

Разложение $\cos 7\alpha$ по степеням $\cos\alpha$ приводит к равенству $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = a$, т.е. отличается только знаком.

На примерах уравнений (6) - (7) нетрудно заметить, что степень уравнения указывает на число делений угла. Этому числу соответствуют коэффициенты при первой степени неизвестной и при члене степени $(m-2)$. Свободный член уравнения должен выражать сторону некоторого правильного многоугольника, вписанного в окружность единичного радиуса, при условии, что для угла выполняется равенство $\alpha = \dfrac{180^0}{n}, n \in N$.

Таким образом, если уравнение имеет вид

$$mx - \frac{m(m^2-1)}{4\cdot 6}x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 - \ldots - x^m = \pm a,$$

то, рассматривая свободный член как величину $a = 2\sin m\alpha$, решение можно указать в виде $x = 2\sin\alpha$. В этом и заключается способ Виета, благодаря которому он сумел быстро решить уравнение ван Роумена.

Сопоставив коэффициенты при втором и последнем члене уравнения (1) со степенью уравнения, Виет увидел, что задача сводится к делению угла на 45 частей. Действительно, если в формулах (III) взять $m = 45$, то коэффициенты при степенях синуса совпадут с коэффициентами при соответствующих степенях неизвестной в уравнении (1):

$$2\sin 45\alpha = 45\cdot(2\sin\alpha) - 3795\cdot(2\sin\alpha)^3 + 95634(2\sin\alpha)^5 - \ldots - 45(2\sin\alpha)^{43} + (2\sin\alpha)^{45}.$$

Осталось установить взаимосвязь между правой частью уравнения и величиной $2\sin 45\alpha$. Занятия тригонометрией позволили Виету увидеть еще одну закономерность: правая часть уравнения есть сторона правильного пятнадцатиугольника, вписанного в единичную окружность. Действительно, по формуле, задающей сторону правильного многоугольника через радиус описанной окружности $a_n = 2r\sin\dfrac{180^0}{n}$ (8) можно получить:

$$\begin{aligned} a_{15} &= 2\cdot 1\cdot \sin\frac{180^0}{15} = 2\sin 12^0 = 2\sqrt{\frac{1-\cos 24^0}{2}} = \sqrt{2-2\cos 24^0} = \sqrt{2-2\cos(60^0-36^0)} = \\ &= \sqrt{2-2\cos 60^0\cos 36^0 - 2\sin 60^0 \sin 36^0} = \sqrt{2-\cos 36^0 - \sqrt{3}\sin 36^0} \end{aligned} \qquad (9).$$

Значения $\cos 36^0$ и $\sin 36^0$ через радикалы должны были быть известны Виету из пентаграммы.

Если $\cos 36^0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, то

$$\sin 36^0 = \sqrt{1-\cos^2 36^0} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Подставляя эти значения в (8), получим

$$a_{15}=\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}=\sqrt{1\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{8}}}=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}\quad(10).$$

Таким образом, правая часть уравнения (1) равна величине $a=2\sin 12^0$. По методу Виета, корень данного уравнения $x=2\sin\frac{12^0}{45}$. Это решение и указал Виет, вызвав восторг короля и его свиты.

На следующий день Виет дал еще 22 решения уравнения. Таким образом, Виет указал три положительных решения уравнения. Все они могут быть заданы формулой

$$x_n=2\sin\frac{12^0+360^0n}{45},\quad n=0,1,2,...,22.$$

Это уравнение имеет еще двадцать два отрицательных корня, но Виет не работал с отрицательными числами. Если учесть, что алгебраическая символика еще была несовершенной, не было обозначений тригонометрических функций, не было удобного обозначения радикалов, то решение Виетом уравнения ван Роумена действительно вызывает восхищение. Недаром этим решением он прославился на всю Европу. Эта победа значительно повысила авторитет французских математиков. Именно с этого времени Франция занимает одно из ведущих мест среди европейских научных школ.

При реконструкции решения Виета пришлось столкнуться с рядом трудностей. Идея решения, изложенная в [2], как будто указывает на формулы (II). Но их применение не дает результата. Существенной оказалась формула (III), которую практически невозможно обнаружить в современных справочниках по математике. Кроме того, совершенно непонятно было, почему громоздкое выражение в радикалах в правой части уравнения есть длина стороны правильного пятнадцатиугольника. Не сразу удалось получить разложение (10), так как на этапе (9) надо было отказаться от многократного применения формулы косинуса двойного угла и представить $24^0=60^0-36^0$. К этой мысли привело наличие величины $\sqrt{5}$ в правой части уравнения (1) и знакомство с выражением через числа золотой пропорции значений тригонометрических функций углов пентаграммы. Получив разложение (10), можно указать ошибку в записи уравнения (1) во многих изданиях.

В заключении отметим, что успех Виета в решении столь сложного уравнения (1) связан с тем, что он разработал оригинальный способ решения алгебраических уравнений при помощи тригонометрических функций. Он опирается на формулы (III) и (8), а также мастерство различных замен и представления в радикалах значений синусов и косинусов углов.

Литература

1. Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. – Киев: Радянська школа, 1979. – 606 с.

2. История математики с древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А.П. Юшкевича. – Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

3. Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI-XVII вв. – М.: Наука. 1979. – 206 с.