

## ЗАКОН СИММЕТРИИ И ЕГО УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР

Некоторые теоретические понятия непреходящи: они встречаются у истоков знания и - в развитых формах - в самых различных областях современной науки. К числу таких понятий относится и понятие симметрии.

Понятие симметрии имеет весьма общий характер. Симметрия реализуется в многообразных формах, сохраняя исходное содержание. Она предстает как средство синтеза культуры, как способ выявления различных форм знания.

Термин "симметрия" в разные исторические эпохи использовался для обозначения разных понятий.

Первоначальное понятие о геометрической симметрии возникло в Древней Греции. Само слово "Симметрия" произошло от греческого слова *συμμετρία* (*συμ* - вместе, совместно; *μετρία* - мера) - совместная мера, соразмерность. Как видим, в античности понимание симметрии было много шире нашего обычного о ней представления. У пифагорейцев под симметрией понимался способ согласования многих частей, с помощью которого они объединяются в целое (упорядоченное расположение частей целого). Евклид понимал под симметрией соизмеримость. У Витрувия это понятие означало соразмерность, пропорциональность, гармонию. В своем знаменитом сочинении "Десять книг об архитектуре" Витрувий называет совершенными те сооружения, в которых достигнута "точная соразмерность" всех частей с основной мерой. Однако, какой математический смысл вкладывал автор в эту фразу, остается до конца неясным. Одно из объяснений заключается в том, что здание считалось симметричным, если оно имело какую-то легко различимую часть, такую, что размеры всех остальных частей получались умножением этой части на целые числа, и таким образом, исходная часть служила видимым и понятным модулем. Считалось, что симметрия образует канон красоты. Идея симметрии вносилась даже в совершенно иную - моральную область. Космос, мироздание понималось у древних греков как нечто соразмерное, гармоничное. Человек мыслился подражанием космосу, а значит, как выражение космической гармонии. И здесь "симметрия" имеет смысл так называемой "средней меры", к которой должен стремиться добродетельный человек, и которая описывается как состояние духа, равным образом удаленное от обеих крайностей, например, от горя и радости, апатии и возбуждения.

Постепенно такое широкое толкование понятия симметрии утрачивается, и уже в эпоху Возрождения представление о симметрии приобретает тот смысл, который имеем и мы в своем обыденном его понимании (уравновешенность левого и правого). Однако, сегодня, когда различные области знаний стремятся к интеграции, мы вновь возвращаемся к понятию симметрии, как явлению, присущему самым различным областям знаний, объединяющим в себе самые разнообразные явления действительности.

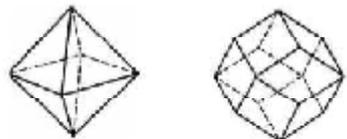
Своим развитием современное учение о симметрии обязано естествоиспытателям, углубленно изучавшим кристаллические образования. Объясняется это тем, что формы кристаллов с древнейших времен поражали глаз своей симметричностью.

Изучение таких фигур представляло существенный практический интерес, так как многие природные кристаллы принадлежат к ценным полезным ископаемым. Попутно с изучением высокосимметричных кристаллических фигур кристаллографам и минералагам поневоле пришлось развигать и учение о симметрии.

*Каждая снежинка - это  
маленький кристалл  
замерзшей воды*



*Кристаллы алмаза*



Традиционно в школьной математике под «симметрией» понимается такое преобразование пространства (плоскости), при котором каждая точка  $M$  переходит в другую точку  $M'$  относительно некоторой плоскости (прямой или точки)  $a$ , когда отрезок  $MM'$  является перпендикулярным плоскости (или прямой, или проходит через точку)  $a$  и делится ею пополам. Плоскость (прямая или точка)  $a$  называется при этом плоскостью (или осью, или центром) симметрии. К фундаментальным понятиям симметрии относятся *плоскость симметрии*, *ось симметрии*, *центр симметрии*. Основные виды симметрии, которые изучаются в геометрии – центральная, осевая, зеркальная.

Однако понятие симметрии в геометрии более широкое. В геометрии сегодня под симметрией понимают неизменность геометрического объекта по отношению к каким-то геометрическим преобразованиям, выполняемым над ним (или совмещение фигуры при определенного рода геометрических преобразованиях). В связи с этим можно говорить о переносной и поворотной видах симметрии, а также о сочетаниях различных видов, среди которых особенно выделяют зеркально-поворотную, скользящую и винтовую.

Существует еще такое определение симметричной фигуры: «фигура называется симметричной, если она состоит из равных закономерно повторяющихся частей» [3, с. 19]. В этом определении следует уточнить понятие равенство. Обычно две фигуры называются равными, если для каждой точки одной фигуры обязательно найдется соответственная точка в другой фигуре, причем расстояние между двумя точками одной фигуры равно расстоянию между соответственными точками другой. Однако существует и другой род равных фигур, которые относятся друг к другу, как предмет и его зеркальное отражение. Примером таких фигур могут служить две парные перчатки – левая и правая. Поэтому в определении, говоря о равных частях симметричных фигур, к ним относят как совместно равные, так и отраженно равные части таких фигур.

Для точной характеристики закономерностей (в соответствии с которыми повторяются равные части фигур) используют элементы симметрии. Элементы симметрии помогают выявлять и математически точно характеризовать симметрию фигур. К элементам симметрии относят центр симметрии, оси симметрии, зеркально-поворотные оси и плоскости симметрии фигур. С помощью этих элементов симметрии можно описать любой конечный объект. Симметрия бесконечной геометрической фигуры описывается с помощью следующих элементов симметрии: вектор переноса (переносная симметрия), плоскость (ось) скользящего отражения (скользящая симметрия), винтовая ось (винтовая симметрия).

Таким образом, симметрию геометрического объекта можно изучать с точки зрения элементов симметрии или с точки зрения различных геометрических преобразований, которые переводят фигуру в себя.

Совокупность всех ортогональных преобразований, совмещающих фигуру саму с собой, является группой и называется группой симметрии этой фигуры. Математическим аппаратом изучения симметрии сегодня является один из разделов алгебры - теория групп и теория инвариантов. Таким образом, понятие симметрии из геометрии переходит в алгебру.

В школе при изучении алгебры учащиеся сталкиваются с понятием симметрии при изучении графиков функций и их свойств, частично при решении симметрических уравнений. Симметрию можно использовать при решении систем уравнений, иррациональных уравнений, неравенств и т.д. Все эти задачи решаются единообразным методом, основанным на теории симметрических многочленов.

Научное определение симметрии принадлежит крупному немецкому математику Г. Вейлю (1885 – 1955), который проанализировал переход от простого чувственного восприятия симметрии к ее научному пониманию. Согласно Вейлю, под симметрией следует понимать неизменность (инвариантность) какого-либо объекта при определенного рода преобразованиях [1]. Под объектом мы можем понимать не только геометрический объект или материальный предмет, но и физическое явление, математическую формулу, уравнение и т.д. Можно гово-

речь об инвариантности функции, уравнения при тех или иных преобразованиях системы координат. Это в свою очередь позволяет применять категорию симметрии к законам физики.

Согласно современным представлениям, понятие симметрии характеризуется определенной структурой, в которой объединены три фактора:

- 1) объект (явление), симметрия которого рассматривается.
- 2) преобразования, по отношению к которым рассматривается симметрия.
- 3) инвариантность, неизменность, сохранение каких-то свойств объекта, выражающая рассматриваемую симметрию. Инвариантность существует не вообще, а лишь по отношению к определенным предметам.

Симметрия принимает свою конкретную форму в каждой области человеческой деятельности.

На явление симметрии в живой природе обратили внимание еще пифагорейцы в связи с развитием ими учения о гармонии. Установлено, что в природе наиболее распространены два вида симметрии - «зеркальная» и «лучевая» (или «радиальная») симметрии. «Зеркальной» симметрией обладает бабочка, листок или жук, и часто такой вид симметрии называется «симметрией листка» или «билатеральной симметрией». К формам с лучевой симметрией относятся гриб, ромашка, сосновое дерево, и часто такой вид симметрии называется «ромашко-грибной» симметрией. Еще в 19-м веке исследования в этой области привели к заключению, что симметрия природных форм в значительной степени зависит от влияния сил земного тяготения, которое в каждой точке имеет симметрию конуса.

Особенно широко понятие симметрии применительно к физическим законам используется в современной физике. Если законы, устанавливающие соотношения между величинами или определяющие изменение этих величин со временем, не меняются при определенных операциях (преобразованиях), которым может быть подвергнута система, то говорят, что эти законы обладают симметрией (или инвариантны) относительно данных преобразований. Например, закон тяготения действует в любой точке пространства, то есть он является инвариантным по отношению переноса системы как целого в пространстве.

В искусстве симметрия проявляется в соразмерности и взаимосвязанности отдельных частей, образующих произведение. Бордюры, используемые в архитектурных и скульптурных произведениях, орнаменты, используемы в прикладном искусстве, - все это примеры использования симметрии.

Симметрия устанавливает внутренние связи между объектами и явлениями, которые внешне никак не связаны. Из чисто геометрического понятия оно превратилось в фундаментальное понятие, лежащее в основе законов природы.

В еще более широком понимании, «симметрия – это общенаучная философская категория, характеризующая структуру организации систем» [2, с 96].

Значительный вклад в развитие теории симметрии внес Пьер Кюри. В 1894 г. появляется его последняя работа, посвященная симметрии, в которой были сформулированы наиболее глубокие идеи ученого, касающиеся универсальной роли симметрии. Пьер Кюри рассматривал симметрию, как состояние пространства, характерное для среды, где происходит данное явление. Для этого необходимо учитывать:

- 1) состояние и строение среды;
- 2) движения изучаемого тела относительно формирующей его среды или движения среды относительно данного тела;
- 3) воздействие на тело других физических факторов.

Универсальный принцип, сформулированный П. Кюри, состоял в том, что форма тела сохраняет только те элементы собственной симметрии, которые совпадают с накладываемыми на него элементами симметрии внешней среды.

Так, поле тяготения обладает высшей формой симметрии – сферической, поэтому сферически симметричны Земля, Солнце и все космические тела, сформированные под действием собственного поля гравитации. По той же причине сферически симметричны и взвешен-

ные в воде микроорганизмы, для которых поле тяготения вторично по сравнению со сферически симметричным полем давления жидкости.

Любая точка земной поверхности под влиянием силы земного тяготения получает “симметрию конуса”. В результате все тела, прикрепленные к определенным точкам на земле и развивающиеся в вертикальном направлении, должны получать в общем симметрию конуса.

В отличие от широко распространенных в природе форм с симметрией конуса, все то, что растет наклонно или по горизонтали, а также все, что движется по земле в разных направлениях, обладает только единственной плоскостью симметрии.

Пьер Кюри придавал особое значение исчезающим элементам симметрии собственной симметрии данного объекта. Такую исчезнувшую симметрию он называл “диссимметрией”. Пьер Кюри выяснил, что именно отсутствующие элементы симметрии допускают развитие системы в отличие от присутствующих элементов симметрии, которые фиксируют ее статус и ограничивают свободу развития. Его знаменитая фраза: “диссимметрия творит явление”.

Учение о диссимметрии получило дальнейшее развитие и углубление в трудах академика А.В. Шубникова.

В дальнейшем Д.В. Наливкин ввел элементы криволинейной симметрии. Он привел примеры эволюции форм некоторых раковин трахиопод и цефалопод. Наряду с изменениями их симметрии от симметрии конуса к одной плоскости симметрии (связанными с переходом от неподвижного образа жизни к подвижному), наблюдается превращение исчезающих элементов классической симметрии в элементы криволинейной симметрии. Таким образом, часть элементов симметрии в процессе эволюции не исчезает, а переходит в изогнутые элементы криволинейной симметрии. Переходы от прямолинейных осей и плоскостей симметрии к элементам криволинейной симметрии в природных телах организмов, кристаллов, геологических объектов, позволяют говорить об обобщающем принципе сохранения симметрии в широком ее понимании. Криволинейная симметрия относится к так называемым неклассическим видам симметрии.

К неклассическим видам симметрии относят также симметрию подобия (А.В. Шубников). Здесь “равными” считаются не только действительно равные фигуры, но и все подобные им, т.е. все фигуры одной и той же формы. По аналогии с операциями симметрии А.В. Шубников выдвигает “операции симметрии подобия”. Эти операции представляют собой своеобразные аналогии переносов, отражений в плоскостях, поворотов вокруг осей с той только разницей, что они связаны с одновременным увеличением или уменьшением подобных частей фигуры и расстояний между ними. Подобные части связаны между собой определенным геометрическим законом, позволяющим выводить их друг из друга. Один из таких законов известен – это золотая пропорция. Таким образом, с понятием симметрии тесно связано понятие пропорции. Пропорция – это изменение, подчиненное идее инвариантности. А инвариантность – это и есть симметрия. Поэтому пропорцию называют еще симметрией подобия.

Важнейшим свойством симметрии является сохранение (инвариантность) тех или иных признаков (геометрических, физических, биологических, информационных и т.д.) по отношению к определенным преобразованиям. Таким образом, первоначальное понятие о геометрической симметрии с течением времени приобрело универсальный смысл. В.И. Вернадский писал: “Новым в науке явилось не выявление принципа симметрии, а выявление его всеобщности.... Принцип симметрии в XX в. охватывает все новые области. Из области кристаллографии, физики твердого тела он вошел в область химии, в область молекулярных процессов и в физику атома. Нет сомнения, что его проявления мы найдем в еще более далеком от окружающих нас комплексов мире электрона, и ему будут подчинены явления квантов” [2, с. 96]. Эти

*Симметрия конуса хорошо видна на примере дерева*



слова Вернадского, сказанные в начале века, сбываются в открытиях симметрии двойной спирали молекулы ДНК и в симметрии кварков.

С понятием симметрии тесно связано понятие асимметрии. Природа почти симметрична, но не абсолютно. Нарушение симметрии обнаружено сегодня во многих явлениях ядерной физики. Симметрия в искусстве не составляет исключения. Асимметрия пробивала себе дорогу в искусстве, ибо сведение красоты только к симметрии ограничивало богатство ее внутреннего содержания, лишало красоту жизни. Таким образом, математическая идея симметрии воплощается всякий раз в реальных не вполне симметричных объектах и явлениях.

Симметрия выражает нечто общее, свойственное разным объектам (явлениям), она связана со структурой, лежит в самой основе вещей. Тогда как асимметрия выражает индивидуальность, она связана с воплощением структуры в том или ином конкретном объекте (явлении). Симметрия – общее, асимметрия – частное.

Между симметрией и ее отрицанием – асимметрией, есть еще два важных симметричных понятия – антисимметрия и диссимметрия.

Диссимметрия – частичное отсутствие симметрии, расстройство симметрии, выраженное в наличии одних симметричных свойств и отсутствии других (об этом понятии говорилось выше).

Антисимметрия – сохранение одного свойства объекта и замена другого свойства на противоположное (введено А.В. Шубниковым в 1951 г.).

Принципы симметрии играют исключительно важную роль в научном познании мира. Любая научная классификация основана на выявлении свойств симметрии классифицируемых объектов. Объекты или явления группируются по общности их свойств, сохраняющихся при определенных преобразованиях. Исследуя неизвестный объект или явление, надо, прежде всего выявить факторы, сохраняющиеся при тех или иных преобразованиях.

Учитывая все выше сказанное, можно сделать вывод, что изучение темы “Симметрия” может способствовать интеграции знаний, а также эстетическому воспитанию обучающихся, развитию их творческих и интеллектуальных способностей. Симметрию, и связанную с ней тему пропорции можно отнести к одним из основных закономерностей математического характера в устройстве Вселенной. Явление симметрии можно рассматривать в абсолютно разных областях нашей жизни. И знание ее законов в одной области может позволить сделать выводы, касающиеся предметов абсолютно другой области. Через понятие симметрии можно дать те знания, которые отражают связанность отдельных частей мира как системы, научить представлять мир как единое целое, в котором все элементы взаимосвязаны. Все это может стать дополнительным фактором формирования положительной мотивации в изучении математики, а также понимания философского постулата о единстве мира и осознания положения об универсальности математических знаний.



*М. Эшер. День и ночь.  
Идея антисимметрии в искусстве*

### Литература

1. Вейль Г. Симметрия. – М.: Наука, 1968. – 191с.
2. Волошинов А.В. Математика и искусство: Кн. для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки. – 2-е изд., дораб. и доп. – М.: Просвещение, 2000. – 399с.
3. Шафрановский И.И. Симметрия в природе. – 2-е изд., перераб. – М.: Недра, 1985. – 168с.