Отметим, что в данной многокритериальной задаче (8) максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений. Действительно паретовские исходы представляются отрезком AB на рисунке 1 и их оценки – всей дугой $PNMQ$ на рисунке 2.

Литература

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
3. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом “Университет”, Высшая школа, 2002.
4. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979.
5. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Лобарёв Д.С.

АВТОМАТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О "ДВУРУКОМ БАНДИТЕ"

<u>Постановка задачи</u>. Требуется провести математическое моделирование поведения человека в игре с “двуруким бандитом”. В качестве объекта исследования (игрока), поведения которого будем изучать, используются конечные автоматы; не путать с “двуруким бандитом” - игровым автоматом. Предполагается, что автомат работает в дискретные такты времени $t = 1,2,...T$.

В общем случае, автомат (модель игрока) представляет собой структуру:

$$A = < F, F, S, f, y >,$$

где $\Phi = \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ - множество внутренних состояний, $F = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ - множество выходных сигналов (действий), $S = \{s_1, s_2, ..., s_l\}$ - множество входных сигналов, f и y - функции смены состояний и действий автомата соответственно. Функции f и y задают систему канонических уравнений автомата:

$$\begin{cases} j(t+1) = f[j(t), \quad s(t+1)] \\ f(t) = y[j(t)] \end{cases}.$$

Рассмотрим поведение автомата (игрока) во внешней среде (игровой автомат “двурукий бандит”). Это означает, что выходные сигналы (действия) автомата являются входными для среды (рис. 1). Реакция среды, воспринимаемые автоматом как входные сигналы, разбиваются на два класса: выигрыш ($s_1(t) = +1$) и проигрыш ($s_2(t) = -1$).

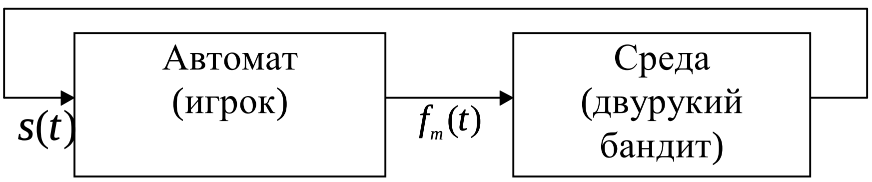

Рис.1

Так как игровой автомат имеет две рукоятки, то игрок может выбирать только два действия: выбор левой рукоятки или выбор правой рукоятки. Т.е. автомат обладает двумя выходными сигналами, которые зависят от реакции “двурукого бандита”: выигрыша или проигрыша. Или формально: $F=\{f_1, f_2\}$, где действия f_1 и f_2 - выбор левой и правой рукоятки соответственно (рис. 2).

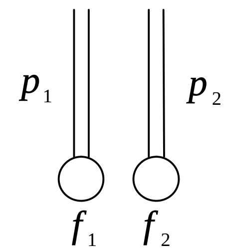

Рис.2

Также будем считать, что автомат функционирует в стационарной случайной среде, которая задается вектором $C=(a_1, a_2, ...a_k)$, где $a_m = p_m - q_m$ математическое ожидание выигрыша за действие f_m, а p_m и q_m - это вероятности проигрыша и выигрыша соответственно автомата за произведенное действие. Заметим, что $p_m + q_m = 1$, $m = 1,2$ (два действия). Проще говоря, стационарность означает, что в “двуруком бандите” не предусмотрена смена вероятностей выигрыша, и соответственно проигрыша, на обеих рукоятках. Т.е. с течением времени значения p_1 и p_2 остаются неизменными (рис.2).

Количество внутренних состояний и реализация системы канонических уравнений автомата порождают различные тактики поведения игрока в задаче о “двуруком бандите”.

<u>Линейная тактика с глубиной памяти 1</u>. При выигрыше автомат (игрок) сохраняет свое действие, а при проигрыше изменяет. Пусть автомат имеет два состояния j_1 и j_2. Т.е. каждому действию f_1 и f_2 соответствуют по одному состоянию j_1 и j_2. Тогда функцию $f(\cdot)$ смены состояний и функцию $y(\cdot)$ смены действий можно представить ориентированным графом, вершины которого соответствуют состояниям автомата, а дуги – тактикой поведения (рис.3). Смена состояний происходит с учетом сигналов оценок за действия, поступающих от игрового автомата. Как видно, при сигнале проигрыш происходит смена состояний в соответствии с пунктирными стрелками, а при выигрыше переходы обозначены дугами со сплошными линиями.

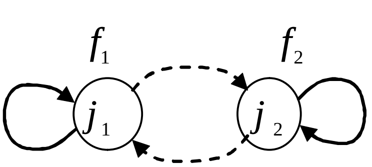

Рис.3

Также функцию $f(\cdot)$ смены состояний удобно обозначать системой двух матриц:

$$P^{+}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

где P^{+} и P^{-} - матрицы смены состояний автомата при выигрыше и проигрыше соответственно. Заметим, что матрицы смены состояний простые, следовательно, автомат является детерминированным.

Вероятности перехода из состояния j_i в состояние j_j определяются как $p_{ij}=p_i\cdot a_{ij}^{-}+q_i\cdot a_{ij}^{+}$, где a_{ij}^{-} и a_{ij}^{+} элементы матриц P^{-} и P^{+} соответственно. В нашем случае, их можно представить матрицей:

$$P=\begin{pmatrix}q_1 & p_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}$$

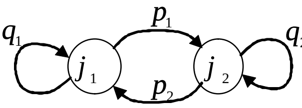

Рис.4

Заметим, что в каждой строке такой матрицы сумма элементов равна 1. Таким образом, поведение системы “автомат – стационарная случайная среда” описывается дискретной цепью Маркова (рис. 4). Если матрица переходных вероятностей P такова, что цепь эргодическая, то существуют финальные вероятности состояний, не зависящие от начального состояния. Вектор финальных вероятностей $\mathrm{p}=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$ найдется из уравнения: $\mathrm{p}=\mathrm{p}\cdot P$ при дополнительном условии $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2=1$. Т.е.

$$(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)\begin{pmatrix}q_1 & p_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}, \text{ откуда } \mathrm{p}_1=\frac{p_2}{p_1+p_2};\ \mathrm{p}_2=\frac{p_1}{p_1+p_2}.$$

Обратим внимание $\dfrac{\mathrm{p}_1}{\mathrm{p}_2}=\dfrac{p_2}{p_1}$, следовательно, если $p_2>p_1 \Rightarrow \mathrm{p}_1>\mathrm{p}_2$.

В исследуемой модели значения p_1 и p_2 определяют закон распределения дискретной случайной величины выигрыша, характеризуемого стационарной случайной средой $C=(a_1,a_2)$. Тогда математическое ожидание выигрыша определяется формулой, известной из курса теории вероятностей: $M=\mathrm{p}_1\cdot a_1+\mathrm{p}_2\cdot a_2$.

Основной вопрос курса теории автоматов – это выявление целесообразности поведения автоматов. Считается, что автомат ведет себя целесообразно, если его суммарный выигрыш (аналог математического ожидания выигрыша M) будет больше, чем в случае равновероятного выбора действий, т.е. в случае распределения $\mathrm{p}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Т.е. для целесообразности поведения игрока необходимо, чтобы $M>M_0$, где

$M_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Или $M - M_0 > 0$.

$$M - M_0 = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot (1 - 2p_1) + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \cdot (1 - 2p_2) -$$

$$- \frac{1}{2}((1 - 2p_1) + (1 - 2p_2)) = \ldots = (p_1 - p_2)^2$$

Следовательно $M - M_0 = (p_1 - p_2)^2 > 0$ (равенство не учитываем, так как иначе двурукий бандит превращается в однорукого), т.е. выбирая линейную тактику, игрок при любом значении вероятностей p_1 и p_2 будет вести себя целесообразно. Поэтому “двурукому бандиту” в случае линейной тактики необязательно повышать значения проигрыша на рукоятках автомата, достаточно только приблизить их вероятности $p_1 \approx p_2$, тем самым лишая игрока выбора тактики поведения.

Оценим вероятности проигрыша игрока на рукоятках p_1 и p_2 в случае его выигрыша.

Игрок будет выигрывать, если $M = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 > 0$. Тогда:

$$M = \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot (1 - 2p_1) + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \cdot (1 - 2p_2) = 1 - \frac{4p_1p_2}{p_1 + p_2} > 0 \Rightarrow \frac{p_1p_2}{p_1 + p_2} < \frac{1}{4}.$$

Или $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 4$ (*).

Проведем анализ полученного неравенства:

1) Построим график зависимости, например, вероятности p_2 от p_1 в случае равенства и определим множество точек плоскости в квадрате $0 \le p_1, p_2 \le 1$, удовлетворяющих неравенству (*). График функции $p_2 = f(p_1) = \frac{p_1}{4p_1 - 1}$ представлен на рис. 5. Таким образом, множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству, расположены ниже и правее графика.

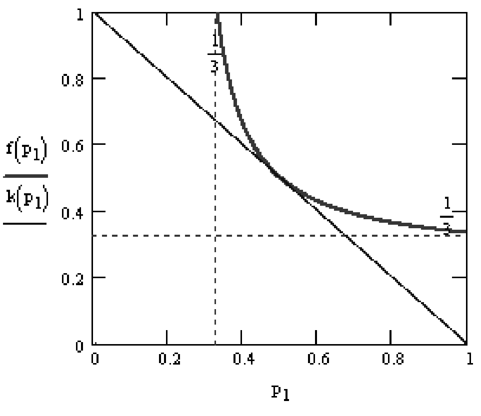

Рис.5

Т.е если вероятность проигрыша хотя бы на одной рукоятке меньше $\frac{1}{3}$ (в этом случае вероятность на другой рукоятке может быть любой, см. рис. 5), то, следуя линейной тактике поведения, игрок всегда будет в выигрыше.

2) Для удобства также оценим суммарный проигрыш на двух рукоятках $p_1 + p_2$. Так как $p_1 + p_2 = 1$ является касательной к функции $p_2 = f(p_1) = \frac{p_1}{4p_1 - 1}$ в точке $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ (см рис. 5), то все точки $p_1 + p_2 < 1$ будут лежать в области исследуемого неравенства (*).

Тогда учитывая результаты 1) и 2) заключим, что игрок всегда выигрывает, следуя линейной тактике, при условии: $\exists i \quad p_i < \frac{1}{3}$ или $p_1 + p_2 < 1$. Но заметим, что эти неравенства описывают не все значения вероятностей выражения (*).

Как было отмечено, финальные вероятности $p = (p_1, p_2)$ можно найти только в случае если цепь Маркова эргодическая, следовательно, различают такие тактики поведения, в которых это условие исключено, и тогда сложно судить о целесообразности поведения игрока. Рассмотрим один из таких случаев.

Тактика одного действия. Как при выигрыше, так и при проигрыше игрок сохраняет свое действие, т.е. играет всегда только на одной рукоятке. В случае с двумя состояниям (по одному на каждое действие) граф смены состояний привет вид, изображенный на рис. 6.

Матрицы смены состояний автомата при выигрыше и проигрыше имеют вид:

$$P^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае переходные вероятности задаются матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При нахождении вектора финальных вероятностей $p = (p_1, p_2)$ получаем систему, которая не дает предельного распределения финальных вероятностей:

$$\begin{cases} (p_1, p_2) = (p_1, p_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_1 \\ p_2 = p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Так как в этом случае $p = (1 - d, d)$, где $d \in [0, \quad 1]$.

Тогда игрок будет вести себя целесообразно в тактике одного действия, причем, получая максимальное значение математического ожидания выигрыша, только в том случае, если сразу угадает на какой рукоятке вероятность проигрыша будет минимальной.

Эта ситуация наблюдается также в тактике игрока, когда, как при выигрыше, так и при проигрыше он меняет свое действие.

Литература

1. Варшавский В. И. Коллективное поведение автоматов.— М.: Наука, 1973. 407 с.

2. Варшавский В.И., Поспелов Д.А. Оркестр играет без дирижера: размышления об эволюции некоторых технических систем и управление ими.— М.: Наука, 1984. 208 с.

Медведева И.Н., Мартынюк О.И., Панькова С.В.,
Соловьева И.О., Лобарев Д.С.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КОМПЕТЕНТНОСТЬ ВЫПУСКНИКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА: СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В "Федеральной целевой программе развития образования на 2006-2010 годы" предписано внедрение компетентностного подхода в образовательный процесс, при этом значительное внимание предполагается уделить обновлению содержания и технологий образования, внедрению новых государственных стандартов на основе компетентностного подхода [1].

Компетентностный подход не отрицает традиционную точку зрения на содержание образования, а актуализирует прагматический аспект того, что у специалиста должно быть сформировано и развито, способствует решению типичной проблемы, когда обучаемые могут хорошо овладеть набором теоретических знаний, но испытывают значительные трудности при применении их на практике [2]. "Отличие компетентностной модели образования от знаниевой так же велико, как скажем знакомство с правилами игры в шахматы от самого умения играть" [3].

С таким показателем, как качество образования, тесно связан результат обучения, который является системообразующим фактором в построении модели специалиста. "Модель специалиста - это описание того, к чему должен быть пригоден специалист, к выполнению каких функций он должен быть подготовлен и какими качествами обладает" [4, с. 28]. Мы разделяем точку зрения, что модель специалиста должна носить системный характер, отражать преимущества квалификационного и компетентностного подходов.

В настоящей работе представлен опыт по формированию модели специалиста в области образования в контексте компетентностного подхода. С учетом отечественного [4], [5], [6], [7] и зарубежного опыта [8], результатов опроса работодателей - администрации ряда школ и представителей Управления образования Псковской области, с привлечением мнения академического персонала и точки зрения выпускников были выделены ключевые, общепрофессиональные и специальные компетентности выпускника физико-математического факультета педагогического университета [9]. Для каждой компетентности были определены уровни сформированности (базовый и продвинутый) с целью их поэтапного формирования.

Компетентностная модель выпускника

Ядро модели выпускника любого вуза составляют ***ключевые*** компетентности, которые мы выделили следующим образом:

- информационная компетентность,
- коммуникативная компетентность,
- социально-правовая компетентность,
- компетентность самосовершенствования,
- компетентность деятельности.