Субъективность выбора интервалов и лингвистических переменных и связанное с ней снижение адекватности логико-лингвистических моделей, могут быть в значительной степени устранены в аналитических [4] и обучаемых [5] нечетких моделях, работоспособность которых обеспечивается аналитическими и численными методами параметрической идентификации, анализа и синтеза нелинейных систем. Рекомендуемая область применения данных методик – динамические процессы, относящие к классу неструктурированных или слабоформализованных, и обладающие комплексом характеристик: уникальность процесса, качественная природа параметров предметной области, неоднородность шкал измерения параметров, импликативный характер взаимосвязи характеристик, многокритериальность, зачастую с противоречивыми критериями, которым должен удовлетворять процесс.

Литература

1. Григорьев Ю.А. Обработка ненадежных знаний на основе нечеткой логики в системе продукций CLIPS.//Интеллектуальные системы. – 2002. №2(4) – С. 74-81

2. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. Рига: / «Зинатне», 1990.

3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его принятие к принятию решений. М: Мир, 1976.

4. Осташев В.В. Представление деформируемого поликристаллического материала на мезоуровне методом нейро-нечеткой идентификации. // Материалы XLIV Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» сентябрь 2006, Белгород, 2006, С. 136-139

5. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MatLab и fuzzy TECH – СПб: БХВ – Петербург, 2003.

Матвеев В.А.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО МНОГОГРАННОМУ КОНУСУ В ЗАДАЧЕ С ВЕКТОРНЫМ ВЫИГРЫШЕМ

Аннотация. В работе рассматривается задача с векторным выигрышем или многокритериальная задача [1]. В качестве её решения обычно определяется оптимальный по Парето исход. В такой задаче, как правило, существует бесконечное множество решений. В работе определяется векторная упорядоченность на основе отношения предпочтения по конусу. Векторная упорядоченность позволяет определить наилучший относительно конуса исход. Такой подход является уточнением оптимальности по Парето. Устанавливается существование оптимального по конусу решения и приводятся его свойства. Рассмотрен модельный пример многокритериальной задачи, в которой указаны все оптимальные по Парето решения, и среди них выделены решения, оптимальные относительно данного многогранного конуса.

Рассматривается задача векторной оптимизации или многокритериальная задача. Используется терминология и обозначения из [1, 2, 3]. Моделью является система

$$\langle X, f(x)\rangle . \qquad (1)$$

Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$, среди которых делается выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. В модели эти свойства описаны функциями: каждая функция представляет одно свойство. Оценка исходов основана только на свойствах этих функций.

Информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша

$f : X \to R^m, m \geq 1$. Значения этой функции каждому исходу ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств $f(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$. Это векторная оценка для исхода $x \in X$. Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_i(x), i = 1,...,m$, являются позитивными. Тогда, на содержательном уровне, цель состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша $f(x)$. Отметим, что в соответствии с [3], множество X и функция f определяют соответственно реализационную и оценочную структуры задачи (1).

Общепринятый подход к определению решения в (1) основан на отношении доминирования по Парето в критериальном пространстве R^m [3, с.56]. Именно, исход $x^* \in X$ называется Парето – оптимальным в задаче векторной оптимизации (1), если $\forall x \in X, \exists i \in \{1,...,m\}, f_i(x) < f_i(x^*)$ или $f(x) = f(x^*)$. Парето – оптимальность исхода $x^* \in X$ означает, что, если возможно перейти к другому исходу и увеличить при этом значение какого – либо критерия, то обязательно найдётся другой критерий, значение по которому в этом случае уменьшится.

В [3, с.58] отмечено, что “кандидатом” на оптимальное решение в многокритериальной задаче может являться только Парето – оптимальный исход. Однако Парето – оптимальных решений в задаче (1) может быть несколько, а в непрерывном случае даже бесконечное множество. Это связано с эффектом несравнимости исходов в векторном критериальном пространстве. Несравнимость исходов является формой неопределённости, именно, ценностной неопределённостью. Она связана с тем, что в условиях неполной информированности имеется стремление достичь нескольких, часто противоречивых целей. Как указано в [3, с.55], выбор между несравнимыми исходами является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в (1) предлагает отношение предпочтения по конусу в критериальном пространстве $R^m, m \geq 1$. Для сравнения векторных исходов рассматривается отношение предпочтения по выпуклому многогранному конусу. Точнее будем рассматривать выпуклый, заострённый, выступающий, пространственный конус K [4, с.1075]. Конус порождает в векторном критериальном пространстве R^m, отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_K$ по правилу

$$f \geq_K g \Leftrightarrow f - g \in K. \qquad (2)$$

Такой конус K называют конусом доминирования в $R^m, m \geq 1$. Часто конусом доминирования является многогранный конус

$$K = \{ f \in R^m \mid Af \geq 0_m \}. \qquad (3)$$

Здесь представлена система m однородных линейных неравенств и 0_m – нулевой вектор в пространстве R^m. Зафиксирована A – квадратная матрица порядка m. Будем считать, что матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1,...,m$ является неотрицательной, т.е. $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной. Важными примерами многогранных конусов являются

$$R^m_{\geq} = \{x \in R^m \;|Ex \geq 0_m\} = \{x \in R^m \;|\; x_i \geq 0, i = 1,...,m\} \qquad (4)$$

и его внутренность

$$R^m_{>} = \{x \in R^m \;|\; x_i > 0, i = 1,...,m\}. \qquad (5)$$

Конусы $R^m_{\geq}$, $R^m_{>}$ определяются единичной матрицей E.

Использование векторной упорядоченности (2) позволяет определить в задаче (1) исходы, оптимальные по конусу K.

Определение 1. Исход $x^* \in X \subset R^n$ называется оптимальным по конусу K в задаче векторной оптимизации (1), если для любого исхода $x \in X$ из того, что $f(x) \geq_K F(x^*)$ следует, что $x = x^*$. Последняя импликация равносильна тому, что $\forall x \in X, x \neq x^*, x - x^* \notin K$. Если для конуса K выполнено включение $R^m_{>} \subset K$, то оптимальное решение $x^* \in X$ будем называть максимальным по конусу. В этом случае, если рассматривать оптимальность относительно конуса $-K$, то решение будем называть минимальным по конусу K. Множество оптимальных или максимальных (минимальных) по конусу K решений задачи векторной оптимизации (1) обозначается $X^* \subset X \quad (X_* \subset X)$.

Замечание 1. Определение оптимального по конусу решения является достаточно общим. Оно включает в себя, как частный случай, Парето – оптимальные решение. Действительно, такое решение получается в определении 1, если в качестве конуса доминирования использовать конус $R^m_{\geq}$ из (4).

Замечание 2. В качестве решения задачи векторной оптимизации (1) также используют оптимальные по Слейтеру решения [4, с. 67]. Именно, исход $x^* \in X$ называется максимальным по Слейтеру в задаче векторной оптимизации (1), если $\forall x \in X, \exists i \in \{1,...,m\}$, что $f_i(x) \leq f_i(x^*)$. Максимальность по Слейтеру выделенного исхода $x^* \in X$ означает, что нет другого исхода, векторная оценка которого по всем критериям больше, чем у выделенного исхода. Заметим, что максимальность по Слейтеру является максимальностью по конусу для конуса доминирования $R^m_{>}$ из (5).

Замечание 3. В многокритериальной задаче (1) определяется A – оптимальное решение [4, с.187]. Пусть задана постоянная квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка m с положительными элементами, т.е. $a_{ij} > 0, i, j = 1,...,m$. Такая матрица A выделяет в векторном пространстве $R^m, m \geq 1$, многогранный конус согласно (3). Этот многогранный конус, а, значит, и положительная матрица A, определяют векторную упорядоченность согласно (2). Исход в задаче (1), оптимальный относительно такой упорядоченности, называется A – оптимальным в задаче векторной оптимизации (1). Из определений следует, что A - оптимальность эквивалентна оптимальности по конусу, который определён положительной матрицей A в (3).

Заметим, что оптимальность по конусу более общее понятие, чем A – оптимальность. Действительно, многогранный конус, заданный положительной матрицей, с помощью которого определяется A – оптимальность, не исчерпывает множества всех выпуклых, заострённых, выступающих конусов в векторном пространстве $R^m, m \geq 1$.

Утверждение 1. Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f: X \to R^m, m \geq 1$ непрерывна, конус доминирования K является выпуклым, заострённым, выступающим в R^m. Тогда в (1) существует исход, оптимальный по конусу K.

Доказательство следует из существования гиперплоскости в R^m, разделяющей компактное множество X и соответствующий конус K.

Утверждение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и конусы доминирования K_1, K_2. Пусть $X_1^* \subset X, X_2^* \subset X$ множества исходов, оптимальных по конусу K_1, K_2 соответственно. Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.

Действительно, пусть $x^* \in X_2^*$. Тогда, согласно определению 1, $\forall x \neq x^*,\ x - x^* \notin K_2$. По условию $K_1 \subset K_2$, значит $x - x^* \notin K_1$. Последнее означает, что $x^* \in X_1^*$. Следовательно $X_2^* \subset X_1^*$, что и требовалось доказать.

Из утверждения 2 следует, что в задаче векторной оптимизации (1) оптимальные по Парето исходы являются уточнением оптимальных по Слейтеру исходов, т.к. $R_>^m \subset K_\geq^m$. Утверждение 1 можно применить к многогранным конусам из (3). Тогда получаем

Утверждение 3. Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус доминирования $K = \{x \in R^m \mid Ax \geq 0_m\}$ с неотрицательной матрицей A (3). Тогда максимальные по конусу K исходы являются оптимальными по Парето.

Оптимальность по Парето является оптимальностью по многогранному конусу $K_\geq^m$, определённому единичной матрицей E в (4). Рассмотрим систему из m однородных неравенств, которая задаётся в матричной форме $Ax \geq 0_m$. Для любой неотрицательной матрицы A последняя система является следствием тривиальной системы m линейных неравенств $Ax \geq 0_m$. Это означает, что $R_\geq^m \subset K$. Тогда по утверждению 1 каждое оптимальное по конусу K решение является оптимальным по Парето, что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальность по конусу является уточнением оптимального по Парето решения. Такой подход позволяет сократить множество претендентов на оптимальный исход. В тоже время предпочтение по конусу порождает определённые вопросы, связанные с наилучшим решением задачи (1). Во-первых, какие свойства, какой содержательный смысл имеют оптимальные по конусу решением, чем они выделяются среди паретовских решений. Во – вторых, каким образом выбирать конус доминирования, ведь таких конусов бесконечное множество. В – третьих, как уточнять оптимальное по конусу решение, если таких решений достаточно много.

Рассмотрим конус доминирования, представленный многогранным конусом (3) с неотрицательной невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij}), i, j = 1,...,m$. Не уменьшая общности можно считать, что матрица A является стохастической
[6, с.381]. У такой матрицы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \ i = 1,...,m. \qquad (6)$$

Произвольную неотрицательную невырожденную матрицу можно привести к условию (6), вынося из каждой строки соответствующий множитель. Хотя матрица при таком преобразовании изменится, но конусы доминирования для исходной и преобразованной матриц будут совпадать.

Рассмотрим произвольную i – ую строку стохастической матрицы A

$$(a_{i1}, a_{i2},..., a_{im}), \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \ a_{ij} \geq 0, \ i, j = 1,...,m.$$

При определении оптимальности по конусу элементы этой строки умножаются соответственно на значения критериев, представленные в векторной функции выигрыша и складываются. Каждая строка матрицы A даёт новый $i - ый$ критерий F_i. При этом элемент $0 \leq a_{ij} \leq 1$ этой строки является "весовым коэффициентом", т.е. множителем или весом с которым исходный критерий $f_j(x)$ входит в новый критерий

$$F_i(x) = a_{i1} f_1(x) + a_{i2} f_2(x) + ... + a_{im} f_m(x).$$

Если какой – то элемент в $i - ой$ строке матрицы равен нулю, т.е. $a_{ij} = 0$, то новый критерий F_i не зависит от этого исходного критерия f_j.

Каждая строка стохастической матрицы A определяет новый критерий. В тоже время совокупность строк матрицы A представляет неопределённость относительно общей итоговой цели. Строки матрицы можно представлять, как мнения нескольких экспертов относительно итоговой цели. Эксперты по-разному видят конечную цель, поэтому строки матрицы линейно – независимы (матрица является невырожденной). В тоже время мнение экспертов является важной информацией и позволяет сократить множество претендентов на оптимальное решение.

В задаче векторной оптимизации (1) оптимальное по конусу решение, относительно многогранного конуса доминирования K из (3), можно рассматривать, как оптимальное по Парето решение для векторной функции выигрыша $A \circ f : X \to R^m$. Здесь $A \circ f$ композиция отображений $f : X \to R^m$, $A : R^m \to R^m$. Тогда оптимальное по конусу K (определённому матрицей A) решение в задаче (1) равносильно оптимальному по Парето решению в задаче векторной оптимизации

$$\langle \ X, \ A \circ f(x) \ \rangle. \qquad (7)$$

Рассмотрим модельный пример, применения оптимального по конусу решения в многокритериальной задаче.

Пример. Рассматривается двухкритериальная задача (1), где множество допустимых исходов $X = R\times\Psi = [0,1]\times[0,p/2]$. Это множество представлено на рис. 1. Задан векторный критерий

$$f(r,q) = (f_1(r,q),\quad f_2(r,q)) = (r\cos q,\quad r\sin q).$$

Здесь допустимые исходы $(r,q)\in R\times\Psi = [0,1]\times[0,p/2]$. Предполагается, что в двухкритериальной задаче выбирает исход так, чтобы доставить возможно большие значения обоим критериям: $f_1(r,q) = r\cos q$ и $f_2(r,q) = r\sin q$. Эти критерии являются позитивными. Такая двухкритериальная задача представлена, как система в

$$\langle\ [0,1]\times[0,p/2],\quad (r\cos q,\quad r\sin q)\ \rangle. \qquad (8)$$

Оценочная структура в задаче определяется в области достижимости

$$f(X) = \{(f_1, f_2)\in R^2 \mid\ f_1 = r\cos q,\ f_2 = r\sin q,\ (r,q)\in R\times\Psi = [0,1]\times[0,p/2]\}.$$

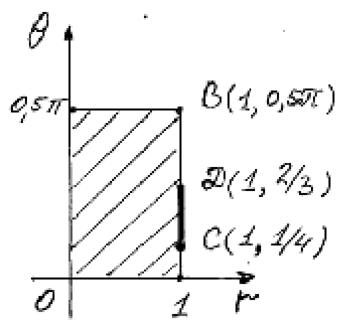

Рис. 1.

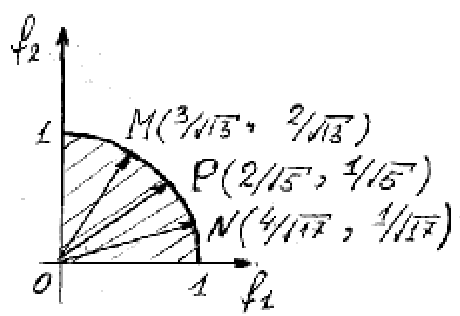

Рис. 2.

Задан многогранный конус доминирования

$$K = \{x\in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2\} \qquad (9)$$

Конус K образуют векторы $x = (x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$3x_1 + 2x_2 \geq 0,$$
$$4x_1 + x_2 \geq 0.$$

Многогранный конус доминирования K из (9) представлен на рис. 3.

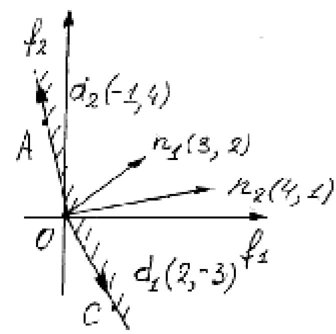

Рис. 3.

Отметим, что в данном случае важность (вес) критериев f_1 *и* f_2 оценивается первым экспертом в отношении 3:2 и вторым экспертом в отношении 4:1. В задаче требуется найти исходы, оптимальные относительно конуса K, в соответствии с определением 1.

Рассмотрим оценки допустимых исходов, представленные на рис. 2. Расположим конус доминирования в R^2 так, что его вершина совпадает с оценкой некоторого исхода. Если в этом случае множество точек конуса не пересекается с множеством оценок всех допустимых исходов (за исключением общей вершины), то соответствующий исход является оптимальным по конусу K. В соответствии с этим оптимальные по конусу исходы расположены на стороне AB (рис. 1) и их оценки на дуге $PNMQ$ (рис. 2). В этом случае $r^* = 1$. Выделим на дуге оценки, оптимальные по конусу. Они расположены на участке дуги MN (рис.2). В пространстве критериев координаты точки N (точки M) находятся из условия

$$\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{4}{1} \qquad \left(\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{3}{2}\right).$$

Получаем координаты точек $N(f_1^N, f_2^N) = ({}^{4}\!/\!{}_{\sqrt{17}}, {}^{1}\!/\!{}_{\sqrt{17}})$ $(M(f_1^M, f_2^M) =$

$({}^{3}\!/\!{}_{\sqrt{13}}, {}^{2}\!/\!{}_{\sqrt{13}}))$. На дуге MN (рис.2) представлены все оценки, оптимальные по конусу. Этим оценкам соответствуют оптимальные исходы. На рисунке 1 эти исходы составляют отрезкок CD. Координаты точки C (точки D) найдём из условия

$$(r^*\cos q^*, r^*\sin q^*) = ({}^{4}\!/\!{}_{\sqrt{17}}, {}^{1}\!/\!{}_{\sqrt{17}}) \; ((r^*\cos q^{\circ}, r^*\sin q^{\circ}) = ({}^{3}\!/\!{}_{\sqrt{13}}, {}^{2}\!/\!{}_{\sqrt{13}})).$$

Учитывая, что $r^* = 1$, для значения $q \in [0, {}^{p}\!/\!{}_{2}]$ получаем уравнение

$tgq^* = {}^{1}\!/\!{}_{4}$ $\quad (tgq^{\circ} = {}^{2}\!/\!{}_{3})$. Тогда $q^* = arctg\, {}^{1}\!/\!{}_{4}$ $\quad (q^{\circ} = arctg\, {}^{2}\!/\!{}_{3})$. Наконец, находим координаты точек $C(r^*, q^*) = (1, arctg\, {}^{1}\!/\!{}_{4})$ и $D(r^*, q^*) = (1, arctg\, {}^{2}\!/\!{}_{3})$. Эти точки представлены на рисунке 1.

В данном примере получены все максимальные по конусу исходы

$$(r^*, q^*), \quad r^* = 1, \quad arctg\, {}^{1}\!/\!{}_{4} \le q^* \le arctg\, {}^{2}\!/\!{}_{3}.$$

Они изображены отрезком CD на рис.1. Множество соответствующих оценок

$$(f_1^*, f_2^*) \in \{(r^*\cos q^*, r^*\sin q^*) |\, r^* = 1,\; arctg\, {}^{1}\!/\!{}_{4} \le q^* \le arctg\, {}^{2}\!/\!{}_{3}\}$$

указаны дугой MN на рисунке 2.

Отметим, что в данной многокритериальной задаче (8) максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений. Действительно паретовские исходы представляются отрезком AB на рисунке 1 и их оценки – всей дугой $PNMQ$ на рисунке 2.

Литература

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
3. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом “Университет”, Высшая школа, 2002.
4. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979.
5. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Лобарёв Д.С.

АВТОМАТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О "ДВУРУКОМ БАНДИТЕ"

Постановка задачи. Требуется провести математическое моделирование поведения человека в игре с “двуруким бандитом”. В качестве объекта исследования (игрока), поведения которого будем изучать, используются конечные автоматы; не путать с “двуруким бандитом” - игровым автоматом. Предполагается, что автомат работает в дискретные такты времени $t=1,2,...T$.

В общем случае, автомат (модель игрока) представляет собой структуру:

$$A=<F,F,S,f,y>,$$

где $\Phi=\{j_1,j_2,...,j_n\}$ - множество внутренних состояний, $F=\{f_1,f_2,...,f_k\}$ - множество выходных сигналов (действий), $S=\{s_1,s_2,...,s_l\}$ - множество входных сигналов, f и y - функции смены состояний и действий автомата соответственно. Функции f и y задают систему канонических уравнений автомата:

$$\begin{cases} j(t+1)=f[j(t), \quad s(t+1)] \\ f(t)=y[j(t)] \end{cases}.$$

Рассмотрим поведение автомата (игрока) во внешней среде (игровой автомат “двурукий бандит”). Это означает, что выходные сигналы (действия) автомата являются входными для среды (рис. 1). Реакция среды, воспринимаемые автоматом как входные сигналы, разбиваются на два класса: выигрыш ($s_1(t)=+1$) и проигрыш ($s_2(t)=-1$).