МАТЕМАТИКА

Осташев В.В.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ПРИ АНАЛИЗЕ И СИНТЕЗЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

"Сложность, сложная система" одно из самых проблемных и противоречивых понятий современной науки. Не претендуя на фундаментальность, в рамках данной работы определим сложную систему как способность частей объединяться в различные конфигурации, проявляя при этом не только коллективные свойства отдельных частей, но и свойства системы как целого. При исследовании таких систем всегда следует учитывать два принципиальных момента:

– при вычленении компонент в таких системах могут быть потеряны фундаментальные свойства, а при добавлении могут возникать качественно новые;

– модель сложной системы, основанная на принципах анализа, будет неустранимо неадекватна изучаемой системе, поскольку при разбиении на составляющие ее компоненты теряют качественные особенности.

1. Концепция нечеткости. Теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткая логика (fuzzy logic) представляют собой обобщение и переосмысление важнейших направлений классической математики. В основе их лежат идеи и достижения многозначной логики, которая показала возможности перехода от двух к произвольному числу значений истинности и к понятиям с изменяющимся содержанием. Теория нечетких множеств, возникшая, с одной стороны, как альтернатива вероятностным и статистическим методам исследования сложных систем, с другой стороны, являясь непосредственным развитием теории вероятностей, получила широкое распространение практически во всех областях знаний после доказательства Б. Коско теоремы FAT (1993г.) о нечеткой аппроксимации (Fuzzy Approximation Theorem), согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике.

Принципиально выделяют три момента, отличающие подходы теории вероятностей и теории нечетких множеств (теория возможностей - термин автора теории Л.Заде):

– по-разному выполняется аксиома дополнения

$P(A)+P(\overline{A})=1$ – теория вероятностей

$p\,(A)+p\,(\overline{A})\neq 1$ – теория возможностей

– классическая вероятность определена как характеристика генеральной совокупности статистически однородных случайных событий. Если статистической однородности нет, то применение классических вероятностей некорректно. В теории нечетких множеств элементарные события рассматриваются не как непересекающиеся, но напротив – образующие цепочку вложенных множеств;

– концептуальное отличие первичности события и вероятности. В теории нечетких множеств событие актуально не потому, что вероятно, а оно вероятно, потому что актуально.

Нечеткие модели могут быть использованы и для описания неопределенностей в вероятностном анализе, однако, нечеткие вычисления отличаются от вероятностных математически и концептуально и более соответствуют случаям, когда плотности вероятностей неизвестны, но высокая адаптивность методов нечеткой логики позволяет агрегировать всю имеющуюся неоднородную информацию: детерминированную, статистическую, интервальную, лингвистическую, и вместе с моделированием решать задачи управления и прогнозирования сложных систем.

2. Основные определения. Понятие нечеткого множества - это математическая формализация нечеткой информации с целью ее использования при построении математических моделей сложных систем. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени, и следовательно, принадлежать к данному множеству в различной степени.

Нечеткое подмножество *A* некоторого множества *E*, определяется как множество упорядоченных пар вида $A = \{m_A(x)/x\}, m_A(x) \in [0{,}1]$, где $m_A(x)$ – характеристическая функция принадлежности, принимающая значение на отрезке [0, 1].

Пересечение двух нечетких множеств (нечеткое «и»):

$$A \cap B : m_{AB}(x) = \min(m_A(x), m_B(x))$$

Объединение двух нечетких множеств (нечеткое «или»):

$$A \cup B : m_{AB}(x) = \max(m_A(x), m_B(x))$$

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в треугольных нормах и конормах. Наиболее распространенные случаи t-нормы и t-конормы.

Пример нечеткого множества (рис. 1а) [1].

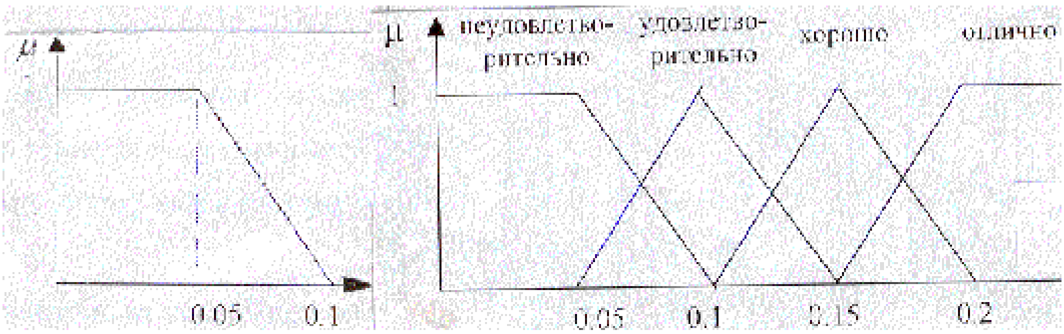
Неудовлетворительную рентабельность можно определить в виде нечеткого множества *A*, где

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 0{,}05 \\ -20x + 2, & 0{,}05 \le x \le 0{,}1 \\ 0, & x > 0{,}1 \end{cases}$$

и представить графиком, который можно трактовать следующим образом: если $0 \le x \le 0{,}05$, то рентабельность является неудовлетворительной со степенью достоверности 1; если $0{,}05 \le x \le 0{,}1$, то рентабельность можно считать неудовлетворительной, но с некоторой степенью достоверности меньшей 1.

Разработан ряд методов построения функций принадлежности

– на основе парных сравнений, на основе экспертных оценок, на основе интервальных оценок, параметрический подход [2].



а) рентабельность б) рентабельность

Рис.1 а - графическое представление нечеткого множества
б - представление лингвистической переменной

Для описания нечетких множеств вводятся понятия нечеткой и лингвистической переменной. Нечеткая переменная описывается набором $< a, E, A >$, где *б* – наименование переменной, *E* – универсальное множество (область определения *б*), *A* – нечеткое множество на *E*. Лингвистическая переменная определяется кортежем $< b, T, E, G, M >$, где *в* – наименование лингвистической переменной на области определения *E*, *T* – базовое терм-множество, *G* – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества, *M* – семантическая процедура, позволяющая термы, образуемые процедурой *G*, превращать в нечеткие переменные.

Термы, каждый из которых является нечетким множеством, можно представить в виде следующей лингвистической переменной *в* (рис. 1б):

в = {неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично}

Расширение терм-множества может быть получено реализацией *G* – процедуры с применением модификатора m или квантификатора q.

3. Формализация модели. Полный цикл исследований сложных динамических систем типа «вход-выход» с применением аппарата нечеткой логики предполагает решение двух взаимосвязанных задач – задача получения и представления в базе знаний (БЗ) эмпирической информации и задача принятия решений на основе найденных закономерностей. Нечеткая модель состоит из пяти функциональных блоков (рис. 2):

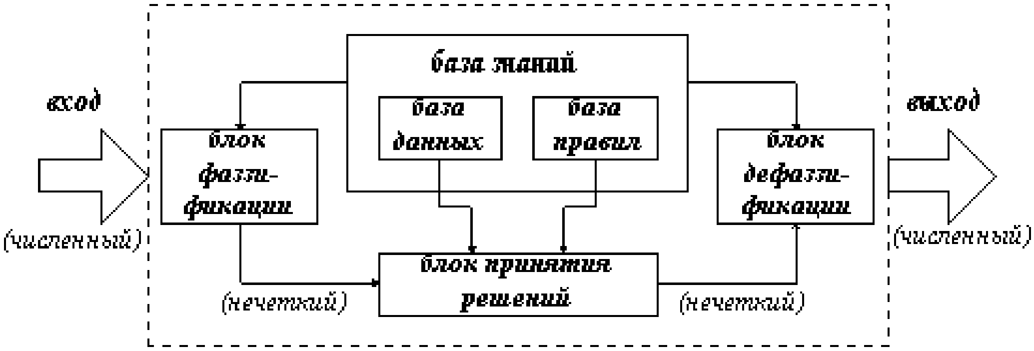


Рис. 2 Система нечеткого вывода

– блок фаззификации, преобразующей численные входные значения в степени соответствия лингвинистическим переменным;

– база правил, содержащая набор нечетких правил «если-то»;

– база данных, определяющая функции принадлежности нечетких множеств, используемых в нечетких правилах;

– блок принятия решений, совершающий операции вывода на основании имеющихся правил;

– блок дефаззификации, преобразующий результаты вывода в численные значения.

Нечеткая БЗ определяется как разбиение пространства влияющих факторов на подобласти с размытыми границами, в каждой из которых функция отклика принимает значения, заданные соответствующим нечетким множеством. Процедура нечеткого вывода реализуется на множестве продукционных правил, составляющих БЗ. В результате формируются выходные лингвистические значения, которые переводятся в точные значения результатов моделирования. В качестве примера рассмотрим алгоритм нечеткого вывода Мамдани, полагая, что в базе знаний находятся только два нечетких правила вида:

$П_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда z есть C_1.

$П_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда z есть C_2,

где x, y – имена входных переменных, z – имя переменной выхода, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – лингвистические термы, которыми оценивают переменные, заданные функциями принадлежности, при этом четкое значение z_0 необходимо определить на основе приведенной информации и четких значений x_0, y_0.

Формально алгоритм Мамдани может быть описан следующим образом:

1. Нечеткость. Определяются степени истинности для предпосылок каждого правила – $A_1(x_0), A_2(x_0), B_1(y_0), B_2(y_0)$

2. Нечеткий вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил

$$a_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);\ a_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0);$$

где через $\wedge$ обозначена операция логического минимума. Находятся «усеченные» функции принадлежности

$$C_1' = (a_1 \wedge C_1(z));\ C_2' = (a_2 \wedge C_2(z));$$

3. Композиция. С использованием операции логического максимума $(\max, \vee)$ производится объединение найденных усеченных функций и получение итогового нечетного подмножества для переменной выхода с функцией, принадлежности

$$m_\Sigma(z) = C(z) = C_1'(z) \vee C_2'(z);$$

4. Приведение к четкости (для нахождения z_0) проводится, как правило, центроидным методом – четкое значение выходной переменной определяется как центр тяжести для кривой $m_\Sigma(z)$.

4. Анализ динамических моделей. Приведенные соотношения получили название максминной композиции Заде. В общем виде формулируется следующим образом [3]. Если на множестве X задано нечеткое множество A, то композиционное правило вывода

$$B = A \circ R,$$

где R – нечеткое отношение, задающее нечеткую импликацию, определяет на Z нечеткое множество с функцией принадлежности $m_\Sigma(z) = \bigcup\left[m_A(x) \cap m_R(x,z)\right]$.

Использование максиминных композиций особенно продуктивно в задачах управления и прогнозирования развития систем.

Например, рассматривая систему управления качеством образования, в терминах нечеткой логики можно построить адекватную динамическую модель процесса усвоения знаний, отражающую во времени зависимость результатов обучения от методического насыщения среды, в которой это обучение происходит.

Определим в качестве базовой математической модели лингвистическую продукционную модель в виде набора правил:

1. Если изучаемый материал – основные понятия, заинтересованность – низкая, то знания - на уровне простых суждений, а умения - репродуктивные.

2. Если материал – основные связи, заинтересованность – высокая, то знания достигают профессионального уровня.

3. Если времени мало – навыки неустойчивые

4. Если времени достаточно, заинтересованность высокая, то знания - профессиональные, навыки устойчивые

5. Если времени достаточно, заинтересованность – средняя, материал – углубленные взаимосвязи, то знания глубокие, умения творческие, навык устойчивый.

Особенностью данной модели являются сложные правила базы знаний, когда несколько посылок, которые обозначим как управляющие воздействия U_t в дискретный момент *t*, соответствуют одному заключению (внутреннее состояние системы X_t). Набор правил, отражающих отношения изменения состояния системы в зависимости от входных воздействий, запишем в виде композиционного правила вывода:

$$X_{t+1} = X_t \circ U_t$$

где $X_t = (x_1 = nb, x_2 = pm, ..., x_n = ze)$ – обобщенный вектор состояния системы, $U_k = (u_1 = pm, u_2 = nb, ..., u_m = nm)$ – обобщенный вектор управляющих воздействий, значение которых представляют лингвистические переменные из заданного терм-множества $S = \{NB, NM, ..., ZE, ..., PM, PB\}$, – множество лингвистических переменных, которые для каждой переменной имеют присущий ей смысл. Например, для переменных состояния $X^i, i = 1,2,3$ (знание, умение, навыки) *NB* означает «очень низкие», *NM* – «низкие», *ZE* – «средние», *PM* – «высокий уровень», *PB* – «очень высокий уровень», и представляют нечеткие множества с заданными функциями принадлежности. Динамическое поведение системы описывается в виде таблиц лингвистических правил, связывающих управляющее воздействие *U* и выходы (либо состояния) *X* (табл. 1) в виде импликативного отображения

$$R(U_t, X_t) \to X_{t+1}$$

где *R* – отношение связи, выполненное на основе знаний эксперта, имеющего определенный опыт управления данной системой;

t – время дискретизации.

Далее на каждом шаге используется алгоритм вывода Мамдани.

В данной работе показана практика применения методов нечеткой логики и теории нечетких множеств в логико-лингвистических моделях.

Таблица лингвистических правил $R(U_t, X_t) \to X_{t+1}$

$U_t \backslash X_t$	NB	NM	ZE	PM	PB
NB	NB	NM	NM	NM	ZE
NM	NM	ZE	ZE	ZE	PM
ZE	NM	ZE	ZE	ZE	PM
PM	NM	ZE	ZE	ZE	PM
PB	ZE	PM	PM	PM	PB

Субъективность выбора интервалов и лингвистических переменных и связанное с ней снижение адекватности логико-лингвистических моделей, могут быть в значительной степени устранены в аналитических [4] и обучаемых [5] нечетких моделях, работоспособность которых обеспечивается аналитическими и численными методами параметрической идентификации, анализа и синтеза нелинейных систем. Рекомендуемая область применения данных методик – динамические процессы, относящие к классу неструктурированных или слабоформализованных, и обладающие комплексом характеристик: уникальность процесса, качественная природа параметров предметной области, неоднородность шкал измерения параметров, импликативный характер взаимосвязи характеристик, многокритериальность, зачастую с противоречивыми критериями, которым должен удовлетворять процесс.

Литература

1. Григорьев Ю.А. Обработка ненадежных знаний на основе нечеткой логики в системе продукций CLIPS.//Интеллектуальные системы. – 2002. №2(4) – С. 74-81
2. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. Рига: / «Зинатне», 1990.
3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его принятие к принятию решений. М: Мир, 1976.
4. Осташев В.В. Представление деформируемого поликристаллического материала на мезоуровне методом нейро-нечеткой идентификации. // Материалы XLIV Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» сентябрь 2006, Белгород, 2006, С. 136-139
5. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MatLab и fuzzy TECH – СПб: БХВ – Петербург, 2003.

Матвеев В.А.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО МНОГОГРАННОМУ КОНУСУ В ЗАДАЧЕ С ВЕКТОРНЫМ ВЫИГРЫШЕМ

Аннотация. В работе рассматривается задача с векторным выигрышем или многокритериальная задача [1]. В качестве её решения обычно определяется оптимальный по Парето исход. В такой задаче, как правило, существует бесконечное множество решений. В работе определяется векторная упорядоченность на основе отношения предпочтения по конусу. Векторная упорядоченность позволяет определить наилучший относительно конуса исход. Такой подход является уточнением оптимальности по Парето. Устанавливается существование оптимального по конусу решения и приводятся его свойства. Рассмотрен модельный пример многокритериальной задачи, в которой указаны все оптимальные по Парето решения, и среди них выделены решения, оптимальные относительно данного многогранного конуса.

Рассматривается задача векторной оптимизации или многокритериальная задача. Используется терминология и обозначения из [1, 2, 3]. Моделью является система

$$\langle X, f(x) \rangle . \qquad (1)$$

Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$, среди которых делается выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. В модели эти свойства описаны функциями: каждая функция представляет одно свойство. Оценка исходов основана только на свойствах этих функций.

Информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша